増補新版

4次元のトポロジー

松本幸夫
［著］

日本評論社

はじめに

我々は，たて，よこ，高さの3方向をそなえた3次元空間に住んでいる．これに“第4の方向”をつけ加えた空間が4次元の世界である．そこには，3次元に見られない変わった現象がいろいろある．

現代トポロジーは，さらに高次元の，5次元，6次元，etc.……の世界についてもさまざまの事実を明らかにした．しかし，その現代トポロジーの知識をもってしても，4次元の基本的問題の多くが未解決のまま残されている．

どうやら，4次元には特殊な未知の事情があるらしいのである．この本は，4次元の世界の理論的特異性を紹介する目的で書かれた．とくに，4次元トポロジーの基本定理とも言うべきロホリンの定理の意味とその意義を明らかにすることをひとつの目標にしている．

読者には高校程度の数学の知識の他は何の予備知識も仮定していない．この本を理解するために必要な知識はすべて基礎からていねいに解説したつもりである．もちろん，教科書のような完全な一般性は期しがたいが，そのかわり，重要な概念のもつ具体的な意味や，その“気持ち”を明らかにすることを心がけた．幾何学的トポロジー入門のための，ひとつの副読本として読んでいただければ幸いである．

おわりに，この本を書くことをすすめて下さり，途中さまざまの有益な意見を聞かせて下さった東京大学教養学部の加藤十吉，また終始お世話になった日本評論社の西原昌幸，徳田敦子の諸氏にあつくお礼を申しあげたい．

1979年8月 —— 著者

[増補新版にあたって]

このたび,『4次元のトポロジー』の増補新版を発行していただけることになり，著者として大変喜んでいます．この本は1979年に初めて出版されました．ちょうど30年前です．奇しくも，この30年間は4次元多様体論が爆発的に発展した時期に重なっています．初版が出たころは未開発で素朴な分野でしたが，いくつかのパラダイム転換を経験して，現代数学の最先端の分野に発展しました．この発展とともに，自分自身もささやかな成長ができたことは幸運でした．

増補新版を出すにあたり,「30年を経て」と題する文章を巻末に付けました．4次元多様体論の進歩を逐一フォロウしているわけではありませんが，著者の狭い視点から4次元多様体論を「定点観測」してきた証にはなっているのではないかと思います．また，この本によっ

て，4 次元多様体論が素朴だった頃を知っていただくのも意味あることではないかと思っております.

今回の増補新版の発行についてお世話になった日本評論社の編集部の皆様に深く感謝いたします.

2009 年 11 月 —— 著者

目次

●デザイン＝海保 透

第1章

まったく素朴な集合論

§1.1 集　　合

集合論から始めよう．この本では難しい高度の集合論はなにも使わない．集合論といってもやさしいことばかりであるが，これから使う言葉の意味や記号の約束だけはいちおうはっきりさせておきたいのである

なんでもよいから，はっきり定まった‘ものの集まり’を**集合**という．‘はっきり定まった’という意味は，何がその集まりに入っていて，何が入っていないか，がはっきりしているということである．ある集合に属しているメンバーをその集合の**要素**とか**元**とかよんでいる．

《例 1》 $\{1,2,3\}$．これは $1,2,3$ を要素とする集合である．1と2と3はこの集合に入っているが，$4,5,6$ などは入っていない．

《例 2》 {ヘンゼル，グレーテル}．ヘンゼルとグレーテルを要素とする集合である．赤ずきんや狼はこの集合には属さない．

《例 3》 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,\cdots\cdots\}$．自然数全体の集合．どんな自然数もこの集合の要素である．自然数でない -1 や $1/2$ や $\sqrt{3}$ などは，この集合の要素ではない．

例1，例2の集合のように，全体として有限個の要素から成り立っている集合を**有限集合**といい，例3の集合のように無限個の要素を含む集合を**無限集合**という．

《例 4》 ‘とても大きな数の全体’．このような漠然とした集まりは集合とはいえない．1000はとても大きな数だろうか．100000はどうだろう．もっとがんばって 1000000 の 1000000 乗くらいなら‘とても大きな数’といってよいだろうか．ある数が‘とても大きな数’かどうかを判定する客観的基準がない以上，この‘集まり’のメンバーはちっともはっきりしないから，集合ではないのである．

ひとつの集合はひとつの文字で表わされる．たとえば

$$A=\{1,2,3\},\qquad B=\{\text{ヘンゼル，グレーテル}\},\qquad \boldsymbol{N}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,\cdots\cdots\}$$

などという具合である．

$\boldsymbol{N}$ は自然数全体を表わす慣用的な記号である．また，整数全体の集合，有理数全体の集合，実数全体（有理数のほかに無理数も全部含む）の集合なども，数学のあちこちに顔を出す大切

な集合であるから，やはり慣用的な記号が決まっていて，それぞれ $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ で表わされる．すなわち

$$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots\}$$

$$\boldsymbol{Q} = \text{有理数全体の集合} = \left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{3}{2}, \pm 3, \cdots, \pm\frac{355}{113}, \cdots \text{etc. etc.}\right\}$$

$$\boldsymbol{R} = \text{実数全体の集合}.$$

ある‘もの’ x が集合 A の要素であることを“$x \in A$”という記号で表わす．($A \ni x$ と書くこともある．) たとえば

$$\text{グレーテル} \in \{\text{ヘンゼル, グレーテル}\}, \quad 10 \in \boldsymbol{N}, \quad \frac{6}{7} \in \boldsymbol{Q}, \quad \sqrt{3} \in \boldsymbol{R}$$

という具合である．

また，x が A の要素でないことを“$x \notin A$”と書く．たとえば，

$$\text{赤ずきん} \notin \{\text{ヘンゼル, グレーテル}\}, \quad \text{グレーテル} \notin \boldsymbol{N}, \quad \frac{1}{2} \notin \boldsymbol{Z}, \quad \sqrt{3} \notin \boldsymbol{Q}.$$

いま A を偶数であるような自然数全体のなす集合とする：$A = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$．$A$ のどの要素も自然数には違いないから，A は自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ の一部分である．このとき A は $\boldsymbol{N}$ の部分集合であるという．一般に2つの集合 A, B があって，A のどの要素も B の要素であるとき，A を B の**部分集合**というのである．‘ならば’という意味の記号‘$\Longrightarrow$’を使って，部分集合の定義を書き表わせば，

任意の要素 x について，

$x \in A \Longrightarrow x \in B$

という条件が成り立つとき，A を B の部分集合という．

A が B の部分集合であることを記号で $A \subset B$, または $B \supset A$ と書く．どんな集合 A についても $A \subset A$ はあたりまえである．上の定義に即して確かめれば，‘$x \in A \Longrightarrow x \in A$’という(アタリマエのこと＝トートロジー)は，すべての要素 x について成り立つからである．すなわち，A は A 自身の部分集合である．

A が B の部分集合であり ($A \subset B$)，同時に B が C の部分集合 ($B \subset C$) なら，A は C の部分集合 ($A \subset C$) である．いわゆる三段論法で確かめられる．

2つの集合 A, B について $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であったら，どうなるだろう．部分集合の定義によれば，A の要素はすべて B の要素であり，同時に B の要素はすべて A の要素である．いいかえれば，A と B とは全く同じ要素たちから構成されていることになる．この場合には A と B を集合として区別する理由は全然ない．そこで，A と B とは同じ集合であると考えてよい．記号で $A = B$ と書き表わす．$A \subset B$ かつ $B \subset A$ なら $A = B$ となることがわかった．これは $A = B$ を証明するときよく使われる．なお，A と B とが同じ集合でないことを $A \neq B$ と表わすことがある．

集合 A が集合 B の部分集合であるという関係 $A \subset B$ はしばしば，集合 A, B の間の包

含関係（ほうがんかんけい）とよばれる．集合 $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ の間には $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ という包含関係が成り立つ．このことは，任意の自然数は整数であり，任意の整数は有理数であり，また任意の有理数は実数であることを物語っている．

和集合 $A \cup B$ と共通部分 $A \cap B$ を定義しよう．2つの集合 A, B が与えられたとき，A または B の少くとも一方の集合に属しているものすべてを集めた集合を A と B の**和集合**といい $A \cup B$ という記号で表わす．A の要素と B の要素を合併した集合である．たとえば $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$ の和集合は $A \cup B=\{1,2,3\}$ である．

和集合とは反対に，集合 A と B に共通に含まれているものだけをすべて集めた集合を A と B の**共通部分**といい，$A \cap B$ という記号で表わす．たとえば $A=\{1,2\}$ と $B=\{2,3\}$ の共通部分は $A \cap B=\{2\}$ である．

一般に，ある条件‘…(ナントカ，カントカ)…’を満たすようなもの x の全体を，記号で

$$\{x \mid \cdots\cdots\}$$

と書くことにすると，和集合，共通部分はそれぞれ次のように書ける．

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$
$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}.$$

和集合や共通部分は，2つ以上の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が与えられた場合にも考えられて，

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n=\{x \mid \text{少くともひとつの } i\ (1 \leqq i \leqq n) \text{ について } x \in A_i\}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n=\{x \mid \text{すべての } i=1,2,\cdots,n \text{ について } x \in A_i\}$$

となる．$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ は $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の要素をすべて合併した集合だし，$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ は全部の A_i に共通に含まれている要素の集合である．

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ と $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ を記号でそれぞれ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ などと書くことがある．足し算 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ を記号で $\sum_{i=1}^{n} a_i$ と書くことがあるが，これを真似た書き方である．

さらに無限個の集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ が与えられたときにも，和集合や共通部分を考えることができる．その定義は詳しく繰り返すこともないと思う．全部を合わせたものが和集合，全部に共通に含まれるもの全体が共通部分である．記号で $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ と書かれる．

和集合，共通部分の記号を，少し簡単に $\bigcup_i A_i$, $\bigcap_i A_i$ と書くこともある．これは $A_1, A_2, \cdots$ が有限個の場合と無限個の場合をいちいち区別して別の記号を使う必要がないので便利である．次の包含関係は，$A_1, A_2 \cdots$ が有限個の場合でも無限個の場合でも成り立っている．

$$\bigcap_i A_i \subset A_i \subset \bigcup_i A_i.$$

なぜなら，$\bigcap_i A_i$ の要素 x は，$A_1, A_2, \cdots$ のすべてに含まれているのだから，とくに A_i にも含まれている．よって $\bigcap_i A_i \subset A_i$．また $A_1, A_2, \cdots$ のすべてを合わせたものが $\bigcup_i A_i$ なのだから，A_i のどんな要素 x も $\bigcup_i A_i$ に入っている．よって $A_i \subset \bigcup_i A_i$.

さて，集合 A, B のとり方によっては両方に共通の要素が全然ない場合がおきる．

《例》 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{$ヘンゼル，グレーテル$\}$.

このような場合，共通部分 $A \cap B$ は‘空っぽ’であるが，このような何も入っていない

'空っぽ' も集合の仲間に入れておくと都合がよい．この '空っぽ' の集合を**空集合**（くうしゅうごう）とよび，記号 ϕ で表わす．空集合の概念を導入しておけば，2つの集合 A, B に共通な要素があってもなくても $A \cap B$ は集合になる．共通な要素がない場合には単に $A \cap B = \phi$ となると思えばよい．

論理的な理由から，空集合 ϕ は任意の集合の部分集合であると約束する．

集合 A が集合 B の部分集合 $(A \subset B)$ のとき，B の要素のうちで A の要素でないもの全体は，ひとつの集合をなしている．これを（B における）A の**補集合**といい，$B-A$ という記号で表わす．式で書けば

$$B-A=\{x \mid x \in B \text{ かつ } x \notin A\}$$

である．$B-A$ は明らかに B の部分集合である．$B-A$ と A との和集合は B に等しい．また $B-A$ と A に共通な要素は存在しない：$(B-A) \cap A = \phi$.

《例》 $A=\{x \mid x \text{ は実数で } 0 \leqq x < 1\}$，$B=\{x \mid x \text{ は実数で } 0 \leqq x < 5\}$ とおけば

$$B-A=\{x \mid x \text{ は実数で } 1 \leqq x < 5\}.$$

('x は実数で' とわざわざことわらずに $A=\{x \mid 0 \leqq x < 1\}$ と書いたり，あるいは $A=\{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leqq x < 1\}$ と書いたりすることもある．誤解の恐れはあるまい．）

A が必ずしも B の部分集合でない場合に，$B-(A \cap B)$ のことを単に $B-A$ と書くことがある．$\{x \mid \cdots\cdots\}$ 型の定義式で書けば，形式上 $A \subset B$ の場合と変わらない：$B-A=\{x \mid x \in B \text{ かつ } x \notin A\}$.

【基本的公式】

(1)　$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

(2)　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C,$

　　$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

(3)　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

　（分配法則）図 1.1 を参照すること．

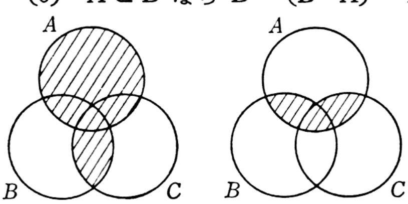
(3)′　$A \cup (\bigcap_i B_i) = \bigcap_i (A \cup B_i), \quad A \cap (\bigcup_i B_i) = \bigcup_i (A \cap B_i)$　（(3) の拡張）

(4)　$B-(\bigcup_i A_i) = \bigcap_i (B-A_i), \quad B-(\bigcap_i A_i) = \bigcup_i (B-A_i)$　（ド・モルガンの法則）

　図 1.2 を参照すること．

(5)　$A \cap (B-A) = \phi$

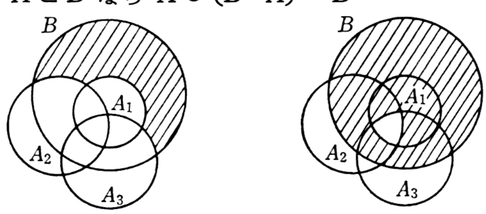
(6)　$A \subset B$ なら $B-(B-A)=A, \quad A \subset B$ なら $A \cup (B-A) = B$



$A \cup (B \cap C) =$
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) =$
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

図 1.1



$B-(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$
$(B-A_1) \cap (B-A_2) \cap (B-A_3)$

$B-(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$
$(B-A_1) \cup (B-A_2) \cup (B-A_3)$

図 1.2

これらの公式の証明は，各自図を見たりして納得してほしい．論理的な説明もそれほど困難ではない．

問題 $\{7\}$ と 7 の違いを言え．

（答） 7 は数字であって集合ではないが，$\{7\}$ は 7 というひとつの数字だけを要素とする集合である．$7 \in \{7\}$ である．また $\{7\} = \{x \mid x = 7\}$ とも書ける．

§1.2 写　像

写像について説明しよう．集合 A から集合 B への**写像** f というのは，A の要素のひとつひとつに B の要素を対応させる操作，またはその対応の規則のことをいう．

《**例 1**》 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{$ヘンゼル，グレーテル$\}$ とする．次のような対応を考える：1 にはヘンゼルを対応させる，2 にもヘンゼルを対応させる，3 にはグレーテルを対応させる．

この対応を簡単に

$$1 \longmapsto \text{ヘンゼル}, \quad 2 \longmapsto \text{ヘンゼル}, \quad 3 \longmapsto \text{グレーテル}$$

と書く．この対応は A から B へのひとつの写像 f を決める．

例 1 の写像を図 1.3 のような絵で表わすことができる．

一般に，A から B への写像は $f: A \longrightarrow B$ とか $A \xrightarrow{f} B$ とかの記号で表わされるが，これは図 1.3 のような絵を象徴的に表わしたものと思えばよい．

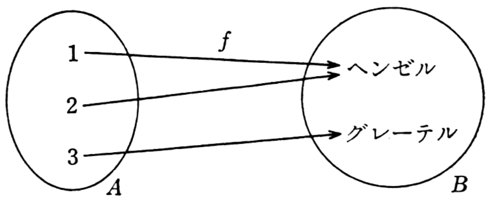


図 1.3

A の要素 x が写像 $f: A \longrightarrow B$ によって B の要素 y に写る（対応する）とき $y = f(x)$ と書く．たとえば例 1 では，ヘンゼル $= f(1) = f(2)$，グレーテル $= f(3)$ である．

f, g という，A から B への写像が 2 つあって，次の条件

（＊） どんな $x \in A$ についても $f(x) = g(x)$

が成り立っているとしよう．この場合には，A のどの要素 x についても，f によって x が写った先の B の要素 $f(x)$ と g によって x が写った先の B の要素 $g(x)$ とは同じなのだから，写像として f と g を区別する理由はない．そこで，このような場合，f と g は同じ写像である，と考えることにする．記号で $f = g$ と書く．

《**例 2**》 $M = \{n \in \boldsymbol{N} \mid n \geqq 2\}$ とおく（2 以上の自然数全体の集合である）．$f: M \longrightarrow M$，$g: M \longrightarrow M$ をそれぞれ次のような写像とする．

$$f(n) = n \text{ を割り切る最小の素数}, \quad g(n) = n^2 \text{ を割り切る最小の素数}$$

このとき $f = g$ である．（なぜか？）

写像の合成を定義しよう．A, B, C を 3 つの集合とし，A から B への写像 $f: A \longrightarrow B$，B から C への写像 $g: B \longrightarrow C$ があるとする．A の要素 x を f で写すと B の要素 $f(x)$ になる，この $f(x)$ をこんどは g で写すと C の要素 $g(f(x))$ になる．このような‘2 段と

び' をいっぺんにとんで，A の要素 x に C の要素 $g(f(x))$ を対応させると，これは A から C への写像になる．この写像 $A \longrightarrow C$ を，f と g の**合成**または**合成写像**とよぶ．記号で $g \circ f$ と書き表わす．g と f の順序に注意してほしい．念のため，もう一度合成 $g \circ f : A \longrightarrow C$ の定義を書いておくと，$g \circ f(x) = g(f(x))$ である．

《**例 3**》 3つの集合 A, B, C を

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{\text{ヘンゼル, グレーテル}\}, \quad C = \{♂, ♀\}$$

とする．写像 $f : A \longrightarrow B$ を例1のように決める．また写像 $g : B \longrightarrow C$ を，$g(\text{ヘンゼル}) = ♂$，$g(\text{グレーテル}) = ♀$ と定義すれば，合成写像 $g \circ f$ は

$$g \circ f(1) = ♂,$$

$$g \circ f(2) = ♂,$$

$$g \circ f(3) = ♀$$

となる（図 1.4）．

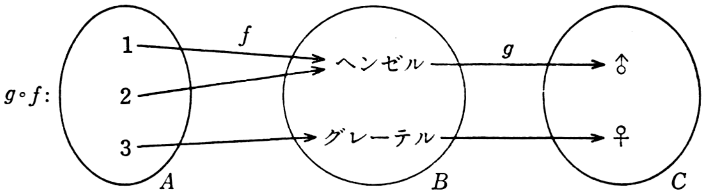


図 1.4

図 1.4 のような絵は記号的に $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ と書かれる．写像の合成は3つ以上の写像についても考えられる．たとえば4つの集合 A, B, C, D があり，その間に写像 f, g, h が次のように与えられているとする：

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D.$$

このとき，A の要素 x を f によって B に写した先 $f(x)$ を，こんどは g によって C に写し，その写った先 $g(f(x))$ をさらに h によって D に写す．こうして $h(g(f(x)))$ が得られる．このような '3段とび' を一気にとんで，A の要素 x に D の要素 $h(g(f(x)))$ を対応させる写像 $A \longrightarrow D$ を，f, g, h の合成または合成写像という．記号で $h \circ g \circ f$ と書く．

$h \circ g \circ f$ は3つの写像 h, g, f の合成であるが，これを $g \circ f : A \longrightarrow C$ と $h : C \longrightarrow D$ の合成と考えることもできるし，また $f : A \longrightarrow B$ と $h \circ g : B \longrightarrow D$ の合成と考えることもできる．すなわち，次の公式が成り立つ．

$$h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

特別な性質をもつ写像，全射と単射について説明する．ある写像 $f : A \longrightarrow B$ が**全射**であるというのは，B のどんな要素 y についても（写像 f によって）y に写ってくるような A の要素 x が少くともひとつ存在することである．少し違う言葉で言えば，任意の $y \in B$ について，$y = f(x)$ となるような $x \in A$ があることである．

《**例 4**》 $\boldsymbol{N}$ を自然数全体の集合とし，$f : \boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{N}$ を $f(n) = n^2$ と定義する．この f は全射ではない．たとえば $f(n) = 5$ となるような $n \in \boldsymbol{N}$ はないから．

《**例 5**》 $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とする．$f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $f(x) = x + 1$ と定義すれば，この f は全射である．どんな $y \in \boldsymbol{R}$ についても $f(x) = y$ となる $x \in \boldsymbol{R}$ があることは明らかだろう．$x = y - 1$ がそれである．

《**例 6**》 $A = \boldsymbol{Z} - \{0\}$ とおく（A は0でない整数の全体である）．$f : A \longrightarrow \boldsymbol{N}$ を $f(m) = |m|$（m の絶対値）とおけば f は全射である．

$f:A \longrightarrow B$ が全射であるとき，f を B の**上への写像**ということがある．

次に単射を定義しよう．写像 $f:A \longrightarrow B$ が**単射**であるというのは，A の異なる要素は f によって必ず B の異なる要素に写ることである．A の任意の2要素 x_1, x_2 について，もし $x_1 \neq x_2$ なら $f(x_1) \neq f(x_2)$ であること，と言ってもよい．あるいはその対偶をとって，$f(x_1) = f(x_2)$ なら $x_1 = x_2$ となること，と言っても同じことである．単射 $f:A \longrightarrow B$ を A から B への**1対1写像**ということもある．

《例 7》 $\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合とし，$f:\boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を $f(n) = n^2$ と定義する．これは単射ではない．たとえば $5 \neq -5$ であるのに $f(5) = f(-5) = 25$ であるから．

《例 8》 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{Z}$ への写像 $f:\boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を，例7と同様に $f(n) = n^2$ と定めれば，こんどは単射である．n と m が異なる自然数なら，n^2 と m^2 も異なるからである．

例8の写像 $f:\boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ は，例7の写像 $f:\boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ をとくに $\boldsymbol{Z}$ の部分集合 $\boldsymbol{N}$ だけに限って考えたものである．このように，ある写像 $f:A \longrightarrow B$ を，A の部分集合 C だけに限って考えた写像 $C \longrightarrow B$ を f の C への**制限**または**制限写像**とよび，$f|C:C \longrightarrow B$ という記号で表わす．またもとの $f:A \longrightarrow B$ を $f|C$ の**拡張**ということもある．

《例 9》 A をかってな集合とする．A の要素 x にそれ自身 x を対応させると A から A 自身への写像ができる．これを A の**恒等写像**とよび，$\mathrm{id}_A:A \longrightarrow A$ という記号で表わす．$\mathrm{id}_A(x) = x$ である．明らかに id_A は単射である．(id. は identity の略.)

また C を A の部分集合とするとき，C の要素 x にそれ自身 x を A の要素と考えて対応させ，写像 $C \longrightarrow A$ を得る．これを C から A への**包含写像**とよび，$i:C \longrightarrow A$ で表わす．i は inclusion の略である．包含写像 $i:C \longrightarrow A$ は恒等写像 $\mathrm{id}_A:A \longrightarrow A$ の，C への制限である：$i = \mathrm{id}_A|C$.

包含写像 $i:C \longrightarrow A$ も明らかに単射である．

写像 $f:A \longrightarrow B$ が全射であり同時に単射であるとき，f は**全単射**であるという．**上への1対1写像**ということもある．恒等写像 $\mathrm{id}_A:A \longrightarrow A$ は明らかに全単射である．

《例 10》 $f:\boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を $f(n) = n+1$ と定義すれば f は全単射である．

《例 11》 $f:\{1,2,3\} \longrightarrow \{2,4,6\}$ を $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$ と定めれば f は全単射である．一般に A と B が有限集合のとき，全単射 $f:A \longrightarrow B$ があれば，A の含む要素の個数と B の含む要素の個数は等しい．

《例 12》 $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とする．$f:\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $f(x) = x^3$ と定義すれば，f は全単射である．

$f:A \longrightarrow B$ が全単射のとき，A の要素と B の要素とはきちんと過不足なく対応している（図 1.5）．

$f:A \longrightarrow B$ と $g:B \longrightarrow C$ がともに全単射なら，その合成写像 $g \circ f:A \longrightarrow C$ も明らかに全単射である（図 1.6）．

$f:A \longrightarrow B$ が全単射のとき，図 1.5 の矢印をいっせいに逆転させてみると，B から A

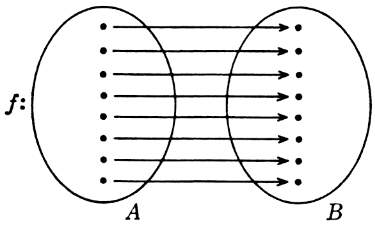


図 1.5　全単射

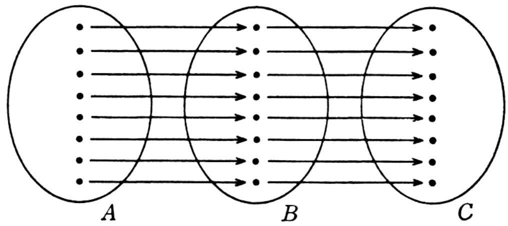


図 1.6　全単射の合成

への写像 $B \longrightarrow A$ が得られる．これを f の**逆写像**とよび $f^{-1}: B \longrightarrow A$ という記号で表わす（図 1.7).

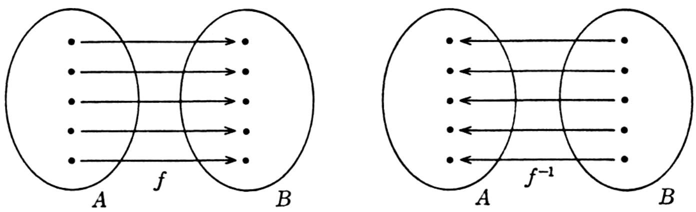


図 1.7

逆写像は正確には次のように定義される．$f: A \longrightarrow B$ が全単射であれば，B のどんな要素 y についても $y=f(x)$ となる $x \in A$ がある．なぜなら，f は全射だから．またこのような x は，各 y についてひとつしかない．なぜなら f は単射でもあるから．よって，各 $y \in B$ について $y=f(x)$ となる x がただひとつ決まる．y にこの x を対応させる写像 $B \longrightarrow A$ が考えられる．これが f の逆写像である．

《例 13》 $f: \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を例 10 の全単射 $f(n)=n+1$ とする．f の逆写像 $f^{-1}: \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ は $f^{-1}(m)=m-1$ である．

《例 14》 $f: \{1,2,3\} \longrightarrow \{2,4,6\}$ を例 11 の全単射とする．f の逆写像 $f^{-1}: \{2,4,6\} \longrightarrow \{1,2,3\}$ は $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(4)=2$, $f^{-1}(6)=3$ となる．

《例 15》 $f: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を例 12 の全単射 $f(x)=x^3$ とする．f の逆写像 $f^{-1}: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ で与えられる．

$f: A \longrightarrow B$ と $g: B \longrightarrow C$ が全単射のとき，合成 $g \circ f: A \longrightarrow C$ も全単射であったが，$g \circ f$ の逆写像 $(g \circ f)^{-1}$ は $f^{-1} \circ g^{-1}$ に等しい（図 1.8).

同様に $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $h: C \longrightarrow D$ が全単射のとき，合成 $h \circ g \circ f$ の逆写像 $(h \circ g \circ f)^{-1}$ は $f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$ に等しい．

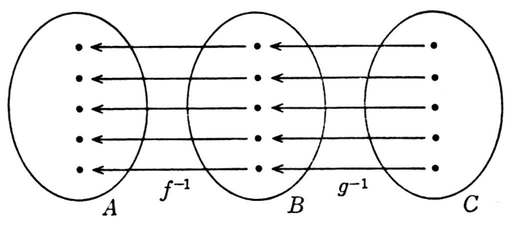


図 1.8　$(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}$

全単射 $f: A \longrightarrow B$ とその逆写像 $f^{-1}: B \longrightarrow A$ を合成して $f^{-1} \circ f: A \longrightarrow A$ を考えてみよう．$x \in A$ は f によって $f(x) \in B$ に写る．f^{-1} はこの $f(x)$ に x を対応させる写像だから $f^{-1}(f(x))=x$．よって合成 $f^{-1} \circ f=\mathrm{id}_A$ である．同様に $f \circ f^{-1}=\mathrm{id}_B$ も確かめられる．f と f^{-1} の役割は全く対等だから，f^{-1} を基準にして考えれば，f は f^{-1} の逆写像である．すなわち $f=(f^{-1})^{-1}$ が成り立つ．

必ずしも全単射でない一般の写像 $f: A \longrightarrow B$ にもどる．A の要素 x が f によって写った先の $f(x) \in B$ を x の f による**像** (image) という．この言葉を A の部分集合 C についても拡張して，C の要素の f による像全体を考える．これは B の部分集合であるが，それを f による C の**像**とよぶ．記号で $f(C)$ と書く．式で定義すれば，

$$f(C) = \{f(x) \mid x \in C\}$$

となる．とくに A の像 $f(A)$ を $\mathrm{Im}(f)$ と書くこともある (Im は Image の略) (図 1.9)．

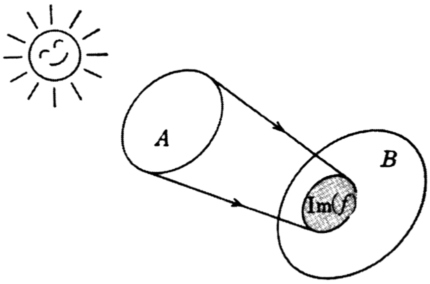


図 1.9

$f: A \longrightarrow B$ が全射であるというのは $\mathrm{Im}(f) = B$ ということにほかならない．

像が出たついでに逆像も定義しておく．こんどは D を B の部分集合とする．そのとき，A の要素 x で f によって D の中に写るようなもの全体を考える．これは A の部分集合をなすが，これを $f: A \longrightarrow B$ による D の**逆像**といい，記号で $f^{-1}(D)$ と書き表わす．すなわち

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

である (図 1.10)．D がとくにひとつの要素 y_0 のみからなる部分集合のとき $f^{-1}(\{y_0\})$ を簡単に $f^{-1}(y_0)$ と書くことがある．これが逆写像の記号と同じだからといって混乱をおこすことはないと思う．$f^{-1}(y_0)$ は y_0 に写るような $x (\in A)$ 全体の集合である．そのような x がなければ，もちろん $f^{-1}(y_0) = \phi$ である．

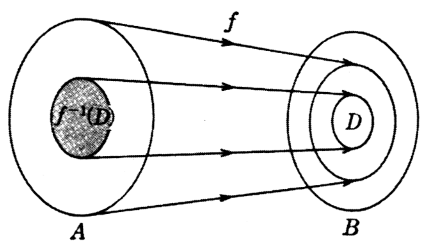


図 1.10

問題　$f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow A$ という写像があり，$g \circ f = \mathrm{id}_A$, $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たせば，f も g も全単射であり，しかも互いに他の逆写像である：$f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$．これを証明せよ．

(ヒント)　任意の $y \in B$ について，$f(g(y)) = \mathrm{id}_B(y) = y$．よって f は全射である．また $x_1, x_2 \in A$ について，$f(x_1) = f(x_2)$ なら $x_1 = \mathrm{id}_A(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = \mathrm{id}_A(x_2) = x_2$．よって f は単射である．g についても同様．

この問題で述べられていることは，ある写像が全単射であることを証明するときよく使われる．

【逆像に関するいくつかの公式】　$f: A \longrightarrow B$ を写像とする．

(1)　$D_1 \subset D_2 \subset B$ なら $f^{-1}(D_1) \subset f^{-1}(D_2)$．

(2)　$D \subset B$ について $f^{-1}(B-D) = A - f^{-1}(D)$

(3)　$D_1, D_2 \subset B$ について $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$，また $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$．

(4)　$f^{-1}(\phi) = \phi$．

$f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ という写像について

(5)　$(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}(g^{-1}(D))$，ただし D は C の部分集合.

(2) の証明　A の要素 x が $f^{-1}(B-D)$ に属したとする. $f(x) \in B - D$. よって $f(x) \notin D$. これは $x \notin f^{-1}(D)$ を意味する. よって $f^{-1}(B-D) \subset (A-f^{-1}(D))$.

逆に，$x \in (A-f^{-1}(D))$ とする. $x \notin f^{-1}(D)$ だから $f(x) \notin D$. これは $f(x) \in B - D$ を意味する. よって $x \in f^{-1}(B-D)$. したがって逆の包含関係 $(A-f^{-1}(D)) \subset f^{-1}(B-D)$ もいえたから $f^{-1}(B-D) = A - f^{-1}(D)$.

(1), (3), (4), (5) の証明も難しくない. 各自確かめてほしい.

第2章

ユークリッド空間から位相空間へ

§2.1　ユークリッド空間

ユークリッドは，紀元前 300 年頃アレクサンドリアで活躍した学者である．彼は無限に広い平らな平面を考え，その上に整然たる幾何学の体系（ユークリッド幾何学）を築きあげた．ユークリッド幾何の成立する普通の‘平らな’平面を**2次元ユークリッド空間**という．

‘2次元’とは，その平面上の点の位置が2個の実数によって指定できるという意味である．実際，平面上に x 軸，y 軸をとれば，点の位置は x 座標，y 座標の組 (x, y) によって一意的に（ただひと通りに）決まってしまう（図 2.1）．

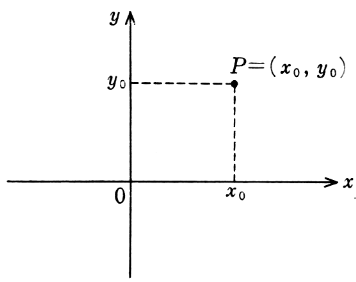


図 2.1

直線の場合には，それを数直線と考えることによって，直線上の点の位置はただひとつの実数によって完全に決まる．この意味で直線のことを**1次元ユークリッド空間**とよぶこともある（図 2.2）．

‘我々のまわりの’空間では，タテ，ヨコ，高さの3方向に x, y, z 軸をとれば，点の位置は3つの実数の組 (x, y, z) によって一意的に表わされる．我々のまわりの空間を（頭の中で）どこまでもまっすぐ延長した空間を**3次元ユークリッド空間**という（図 2.3）．

このように座標軸を考えることにより，直線，平面，3次元空間を，それぞれ実数全体の集

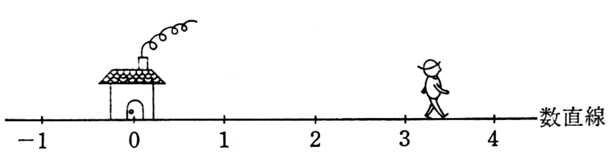


図 2.2

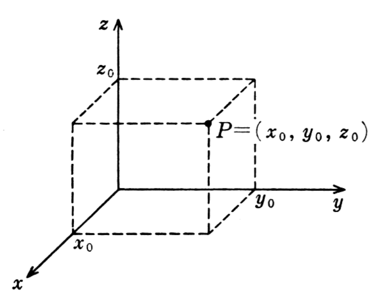


図 2.3

合 $\boldsymbol{R}$, 2つの実数の組 (x, y) の全体の集合, 3つの実数の組 (x, y, z) の全体の集合と同一視することができる.

座標の考えは17世紀のデカルト (R. Descartes) によるものであるが, 上のような同一視を通じて, 彼は幾何学的対象 (直線, 平面, etc.) と解析的対象 ($\boldsymbol{R}$ とか2つの実数の組 (x, y) とか, etc.) を結びつけることに成功し, '解析幾何' という新しい分野を確立したのであった.

しかし, 座標の効用はそれにとどまらない. 座標の考えによって, 空間の概念を拡張することが可能になる. 我々の素朴な幾何学的直感は1次元, 2次元, 3次元までで, これ以上は進まないが, それぞれの空間の解析的表示 $(x), (x, y), (x, y, z)$ の方は, 形式的に (x, y, z, w), (x, y, z, w, u), etc. … とどこまでも限りなく延長できる. そこで, 逆にこの解析的表示から出発して, より高次元の空間が定義できるのである.

【定義】 ***n* 次元ユークリッド空間**とは, 実数の集合 $\boldsymbol{R}$ の n 個の直積 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \cdots \times \boldsymbol{R}$ のことである.

直積とは次のようなものである. 何でもよいから n 個の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ があるとする. そのとき, A_1 からひとつの要素 a_1 を取り出し, A_2 からひとつの要素 a_2 を取り出し, …, A_n からひとつの要素 a_n を取り出して, この順に並べて, カッコで括る:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

このようなもの全体の集合を, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の**直積**という. 記号で $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と書く. すなわち

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i\}.$$

定義から, n 次元ユークリッド空間は, n 個の実数を並べたもの $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の全体である. 実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の順序が違えば, n 次元ユークリッド空間の要素としても一般には違ったものになる. n 次元ユークリッド空間を記号で $\boldsymbol{R}^n$ と書く. $\boldsymbol{R}^n$ は幾何学的対象と考えられるから, $\boldsymbol{R}^n$ の要素を**点**とよぶ. 点は p, q, r, x, y 等の文字で表わされる. たとえば

$$p = (\sqrt{3}) \in \boldsymbol{R}^1, \quad q = (1, -1, 0) \in \boldsymbol{R}^3, \quad x = (2, 3, 5, 7) \in \boldsymbol{R}^4$$

などのように. (前に, x で実数を表わしたが, ここでは点を表わしている.)

$\boldsymbol{R}^1$ (直線), $\boldsymbol{R}^2$ (平面), $\boldsymbol{R}^3$ (3次元空間) までは直観的イメージがはっきりしている. 4次元空間 $\boldsymbol{R}^4$ になると直観的にはなかなか捉えにくい. 我々の日常生活は3次元空間の中で行なわれているわけだから, 幾何学的直観力がどうしても3次元に制約されてしまう.

3次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の中では, x_1, x_2, x_3 座標 ($= x, y, z$ 座標) はお互いに '直角に' 交わっていた. 4次元空間 $\boldsymbol{R}^4$ でも, 4本の座標軸 x_1, x_2, x_3, x_4 はお互いに '直交' している, と考えられる (図 2.4). 図 2.4 の中で, x_4 軸に沿って3次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ を平行移動したとき, その '軌跡' 全体が $\boldsymbol{R}^4$ である. $\boldsymbol{R}^4$ は x_4 軸に沿って, '我々の' 3次元空間がズラーッと並んだものである. x_4 の各々の値 α に対して, $x_4 = \alpha$ の所にひとつの3次元

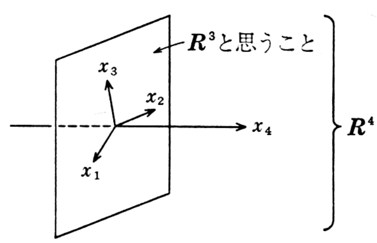


図 2.4

空間がある．この3次元空間は $\{(x_1, x_2, x_3, \alpha) \mid x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}\}$ という形の，$\boldsymbol{R}^4$ の‘部分空間’と考えられる．

x_4 軸をしばしば‘時間軸’と考えるのもこのような事情による．$x_4 = \alpha$ で定義される3次元空間は，時刻が α である瞬間の3次元世界ということになる．しかし，x_4 軸を時間と考えなければならない必然性は数学的には何もない．第4座標に‘時間’という物理的意味を与えると，第5，第6，etc. の座標にも何らかの意味をつけたいような気がしてきりがない．むしろ，これらの一般次元の空間 $\boldsymbol{R}^n$ は，新しく定義された幾何学的対象として，素直に受け入れるのがよい．

さて，$\boldsymbol{R}^n$ の距離というものを定義しよう．まず平面 $\boldsymbol{R}^2$ の場合を考える．$\boldsymbol{R}^2$ に2点 $p = (a_1, a_2)$，$q = (b_1, b_2)$ が与えられると，p, q を結ぶ線分が考えられる．この線分 pq の長さを d とすれば，d は次の式で与えられる（ピタゴラスの定理．図 2.5）：

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

線分 pq の長さは，点 p と点 q の間のいわゆる直線距離であるから，d を p, q 間の**距離**とよび $d(p, q)$ と書く．（d は distance = 距離 の頭文字である．）

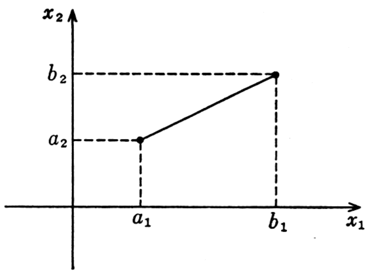


図 2.5

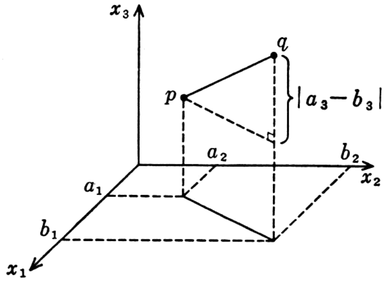


図 2.6

3次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の場合．やはりピタゴラスの定理によって，2点 $p = (a_1, a_2, a_3)$，$q = (b_1, b_2, b_3)$ を結ぶ線分 pq の長さ d は

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

によって計算される（図 2.6）．

$\boldsymbol{R}^3$ の場合にも，上の d は2点 p, q の間の<u>距離</u>を与えている．やはり $d(p, q)$ という記号で表わす．

2点間の距離を表わす公式を n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ にも拡張して，2点 $p = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$q = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ の間の<u>距離</u> $d(p, q)$ を

$$d(p, q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

という式で定義しよう．$n = 2, 3$ の場合には前の公式に一致する．また，$n = 1$ の場合にも，$p = (a_1)$，$q = (b_1)$ の距離は，$d(p, q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2} = |a_1 - b_1|$ となって，常識的な公式に一致する．

《例》 $\boldsymbol{R}^4$ において $p = (1, 2, 3, 4)$，$q = (2, 1, 0, -1)$ の距離を求めてみよう．

$$d(p,q)=\sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2+(3-0)^2+(4-(-1))^2}$$
$$=\sqrt{1+1+9+25}=\sqrt{36}=6.$$

3次元までは，距離 $d(p,q)$ は線分 pq の長さに一致していた．この事実は n 次元でも変わらない．

ところで，n 次元空間の中の線分とは一体何だろう．それを考えるため，平面 $\boldsymbol{R}^2$ にもどろう．$\boldsymbol{R}^2$ に2点 $p=(a_1,a_2)$，$q=(b_1,b_2)$ をとり，線分 pq を考える．t を $0\leqq t\leqq 1$ なるパラメータとし，線分 pq 上の1点 p_t が，この線分を $t:(1-t)$ の比に内分しているとする．そのとき，p_t の座標が

$$p_t=((1-t)a_1+tb_1,\ (1-t)a_2+tb_2)$$

であることはよく知られている（図 2.7）．

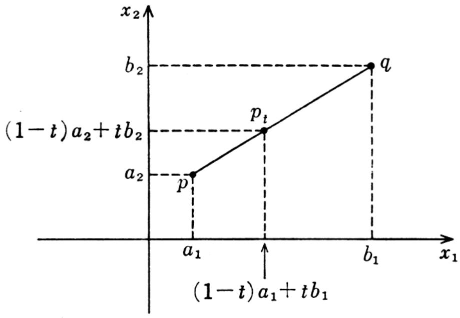


図 2.7　（pp_t の長さ）:（p_tq の長さ）$=t:(1-t)$

点 p_t は，$t=0$ のときは $(a_1,a_2)=p$ に一致し，$t=1$ のときには $(b_1,b_2)=q$ に一致する．そして，t が0から1に変化するにつれて，p_t は線分 pq 上を p から q へ（等速度で）移動して行く．このことから，$\boldsymbol{R}^2$ 上の線分 pq とは，t が0から1まで変わるときの p_t の全体（のなす $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合）である，と考えられる：

$$(\text{線分 } pq)=\{((1-t)a_1+tb_1,(1-t)a_2+tb_2)\,|\,0\leqq t\leqq 1\}=\{p_t\,|\,0\leqq t\leqq 1\}.$$

ついでながら，t が1を越えてさらに大きくなっていくと，p_t は線分 pq を q 方向に延長した半直線上を動いて行く．したがって，p を始点とする**半直線** pq は集合 $\{p_t\,|\,0\leqq t\}$ のことと考えられる．また，t がすべての実数値にわたって変化すると $\{p_t\,|\,-\infty<t<\infty\}$ は**直線** pq になる．

同じような表示は3次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ でもできて，点 $p=(a_1,a_2,a_3)$，$q=(b_1,b_2,b_3)$ を結ぶ線分 pq は $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合

$$\{((1-t)a_1+tb_1,\ (1-t)a_2+tb_2,\ (1-t)a_3+tb_3)\,|\,0\leqq t\leqq 1\}$$

に一致する．半直線や直線についても同様である．

$\boldsymbol{R}^n$ の場合も同様に，2点 $p=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$q=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ を結ぶ**線分**は

$$\{((1-t)a_1+tb_1,\ (1-t)a_2+tb_2,\cdots,(1-t)a_n+tb_n)\,|\,0\leqq t\leqq 1\}$$

という $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合である．論理的には，これはむしろ $\boldsymbol{R}^n$ の中での線分 pq の定義である．この表示に現われた点 $((1-t)a_1+tb_1,\ (1-t)a_2+tb_2,\cdots,(1-t)a_n+tb_n)$ を前と同様に p_t と書く．$\boldsymbol{R}^n$ の（p を始点とする）半直線 pq や直線 pq も，それぞれ $\{p_t\,|\,0\leqq t\}$，$\{p_t\,|\,-\infty\leqq t\leqq\infty\}$ によって定義される．

こうして，$\boldsymbol{R}^n$ の中の線分とは何かがはっきりした．$\boldsymbol{R}^1,\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{R}^3$ までの場合と同じく，$\boldsymbol{R}^n$ においても，線分 pq の長さ $\overline{pq}$ は，p と q の間の距離 $d(p,q)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$ に一致する．（というより，これが $\boldsymbol{R}^n$ での線分の‘長さ’の定義である．）

線分 pq 上の点 $p_t=((1-t)a_1+tb_1,\cdots,(1-t)a_n+tb_n)$ について，長さ $\overline{pp_t}$ と $\overline{p_tq}$ を

いま述べた長さの定義に従って求めてみよう．

$$\overline{pp_t} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \{a_i - ((1-t)a_i + tb_i)\}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} t^2(a_i - b_i)^2} = t\,\overline{pq}$$

$$\overline{p_tq} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \{((1-t)a_i + tb_i) - b_i\}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (1-t)^2(a_i - b_i)^2} = (1-t)\overline{pq}$$

となり，期待通り，点 p_t が $\overline{pq}$ を $t:(1-t)$ の比に分けていることがわかる．

$\boldsymbol{R}^n$ の距離について次の3性質は基本的である．

【距離の3性質】

（i） $d(p,q) \geqq 0$. そして $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

（ii） $d(p,q) = d(q,p)$.

（iii） $d(p,q) + d(q,r) \geqq d(p,r)$.

とくに3番目の不等式は，‘3角形 pqr の2辺 pq と qr の長さの和 $\overline{pq}+\overline{qr}$ は，他の1辺の長さ $\overline{pr}$ より大きい（pqr がこの順に一直線上にあれば $\overline{pq}+\overline{qr}=\overline{pr}$）’という性質に対応しているから，**3角不等式**とよばれている．

性質（i），(ii) は距離の定義式から明らかである．3角不等式はシュヴァルツの不等式に基づいて証明される．

●ノート．3角不等式の証明

$p=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $q=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $r=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ とおき，$A_i = a_i - b_i$, $B_i = b_i - c_i$ とする．すると，

$$d(p,q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}, \quad d(q,r) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} B_i^2}, \quad d(p,r) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (A_i + B_i)^2}$$

である．証明すべき3角不等式の両辺を2乗して，共通項を消去すれば，有名なシュヴァルツの不等式

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}\right)\cdot\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} B_i^2}\right) \geqq \left|\sum_{i=1}^{n} A_i B_i\right|$$

になる．これから3角不等式がわかる．

§2.2 飛躍と連続

平面 $\boldsymbol{R}^2$ の点 (x, y) のうち，条件 $x^2+y^2=1$ を満たすもの全体の作る $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合を考えると，原点を中心とする半径1の円になる（図 2.8）．また，条件 $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たすような (x, y) の全体は，この円周およびその内部からなる円板である．

円や円板に限らず，平面上のいろいろな図形は $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合になっている．同様に3次元空間の図形は $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合である．

以後，図形という言葉を拡張解釈して，一般に n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の任意の部分

集合を R^n の**図形**とよぶことにする．このように拡張解釈すると，もはや図形は円や円板のように，単純な式や不等式で定義されたものとは限らない．3角形，円，正方形など，普通の意味のキチンとした図形はもちろん，もっと複雑で不規則な形の部分集合も図形である．空集合 ϕ，1点だけからなる集合 $\{p\}$，R^n 自身などにしても，R^n の部分集合には違いないから，我々の言葉使いでは図形である．

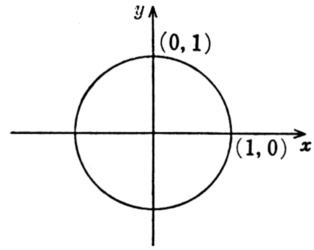


図 2.8

さて，A, B をそれぞれ R^m, R^n の図形とする．この § の目的は，A から B への連続写像 $f: A \longrightarrow B$ を定義することである．読者は既に**連続関数**を御存知のことと思う．実数 x に関数の**値**とよばれる実数 y を対応させ，x がほんの少し変化すればその値 y もほんの少し変化するとき，この関数を連続関数というのであった．

《**例 1**》 実数 x にその2乗 x^2 を対応させる関数 $y = x^2$ は連続関数である．そのグラフは放物線になる（図 2.9）．

《**例 2**》 $f(x)$ を x の多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ とすると，$y = f(x)$ は x の連続関数である．

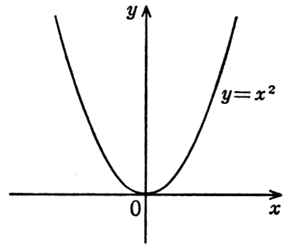


図 2.9

関数は，実数に実数を対応させる写像 $f: R \longrightarrow R$ である．関数のような R から R への写像ばかりでなく，一般に図形 A から図形 B への写像 $f: A \longrightarrow B$ についても，それが連続であるとかないとかが議論できる．関数の場合と同様に，図形 A の点 p が，A の中でほんの少ししか動かない限り，対応する像 $f(p)$ の動きもほんのわずかであるとき，$f: A \longrightarrow B$ を**連続写像**というのである．

写像の連続性をこのように定義することは，わかりやすいけれども，一方ではやや精密さに欠けるところがある．連続性を厳密に定義しようとすれば，ε-δ 論法というものに頼らざるを得ない．それを説明する前に，まず，'連続性' に関する予備的考察をしておこう．

いま，空中を動きまわっている粒子 p（たとえば小さなハエ，ホコリの粒，酸素分子，etc.）の運動を考える．p の位置は時刻の関数であり，時刻 t が決まれば，R^3 における p の位置 $p(t)$ が決まる．そこで p の運動は，写像 $p: R \longrightarrow R^3$ で表わされるとしてよい．（左の R は '時刻' の集合である．）

始めに，連続との対比上，p の動きに**飛躍**のある場合を考える．このような飛躍は現実に起き得ないだろうが，仮にある時刻 t_0 で，p の動きに '飛躍' が起きたとする．時刻 t_0 の瞬間に p_0 の位置にあった粒子が，次の瞬間には突然，離れた点 p_0' に移ってしまうとする．'移ってしまう' という表現は，この場合あまり適切でない．むしろ，時刻 t_0 に p_0 にいた粒子は，時間が t_0 から少しでも経過すると，p_0 からパッと消えて，ある離れた p_0' の所に突然，姿を現わすのである（図 2.10 の左）．このような場合には，t_0 からの時刻の経過をどんなに小さく選んでも，その間の粒子の '動き' を p_0 と p_0' の距離 $\varepsilon_0(>0)$ より小さくすることはできない．どんなに短い時間にも，ある正数 ε_0 だけ離れた所に行ってしまう．これが飛躍である（再び図 2.10 の左）．

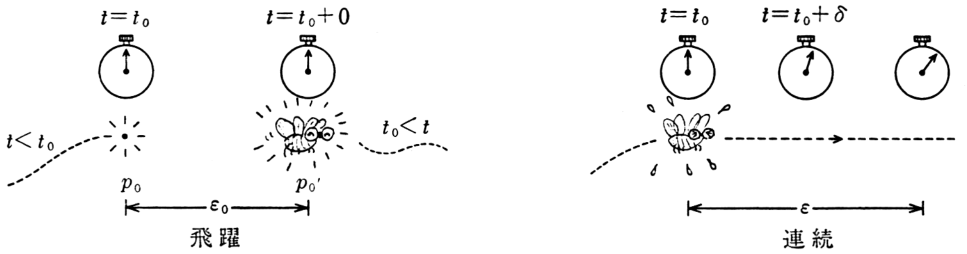


図 2.10

連続とは飛躍の否定である．つまり，いかに小さい距離 $\varepsilon(>0)$ といえども，それだけ動くにはある有限の時間がかかる，ということである．（図 2.10 の右を見よ.）言いかえれば，どんなに小さな距離 $\varepsilon>0$ が与えられても，あまりにも短い時間間隔 $\delta>0$ では，δ の間にそれだけの距離 ε を動くのは不可能なのである.（加速器の中の陽子や電子のように粒子 p がいかに高速度で運動していようとも，その動きが'飛躍'でなくて'連続運動'である限り，極端に短い時間間隔では 1 mm を進むことすら不可能であろう.）

粒子の動きを記述する写像 $p:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}^3$ の言葉で，このことを言いなおせば次のようになる．$p:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}^3$ が（時刻）t_0 で**連続**であるとは，どんなに小さな（距離）$\varepsilon>0$ が与えられても，それに比べて（時間間隔）$\delta>0$ を十分小さく選べば，$|t-t_0|<\delta$ なる限り $d(p(t), p(t_0))<\varepsilon$ が成り立つことである．（$d(p(t),p(t_0))$ は 2 点 $p(t),p(t_0)$ の距離を表わす.）

これが ε-δ 論法による連続性の定式化である．時間とか，粒子の運動とかの具体的意味にこだわらず，写像 $p:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}^3$ の（$t_0\in\boldsymbol{R}$ における）連続性が定義されていると考えてほしい．これを一般の写像 $f:A\longrightarrow B$ の連続性の定義に拡張することは容易である．

【定義】 A,B を図形とする（$A\subset\boldsymbol{R}^m$, $B\subset\boldsymbol{R}^n$）．写像 $f:A\longrightarrow B$ が点 $p_0\in A$ において**連続**であるとは，どんなに小さな $\varepsilon>0$ が与えられても，それに応じて $\delta>0$ を十分小さく選べば，$d(p,p_0)<\delta$ なる限り $d(f(p),f(p_0))<\varepsilon$ が成り立つことである．（p は A の任意の点である.）

'小さな'とか'十分小さく'とか，論理的内容に関係のない気分的な言葉を省いて，ややそっけなく言いかえると次のようになる．

【定義】' $f:A\longrightarrow B$ が点 $p_0\in A$ において**連続**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ について適当な $\delta>0$ が存在し，$d(p,p_0)<\delta\Longrightarrow d(f(p),f(p_0))<\varepsilon$ が成り立つことである．（ただし p は A の任意の点である.）

さらに

【定義】 $f:A\longrightarrow B$ が任意の $p_0\in A$ において上の意味（定義または定義'）で連続のとき，f を**連続写像**という．

《例 3》 $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases}x & (x\text{ が有理数のとき})\\ 0 & (x\text{ が無理数のとき})\end{cases}$$

と定義すると，f は0において連続である.

なぜなら，任意の $\varepsilon>0$ が与えられたとき，$\delta=\varepsilon$ と選べば，$|x-0|=|x|<\delta$ なる限り $|f(x)-f(0)|=|f(x)|=(|x|$ または $0)<\varepsilon$ となるからである.

この f は，0以外のどんな $x_0\in\boldsymbol{R}$ でも連続でない．ε-δ 論法によって初めて，このような関数の連続性を正確に議論できるようになるのである.

もっとやさしい例.

《例 4》 $f(x)=\begin{cases}0 & x\leqq 0\\ 1 & x>0\end{cases}$

によって定義される関数 $f(x)$ は，$x\neq 0$ の所では連続，$x=0$ では連続でない．x の値が0から少しでも増えると，関数の値は0から1に飛躍してしまうからである（図 2.11).

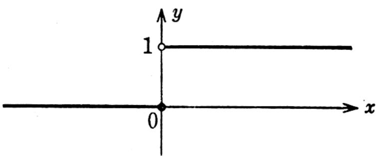


図 2.11　不連続な関数 $y=f(x)$ のグラフ

《例 5》（i） 任意の図形 A について，恒等写像 $\mathrm{id}_A: A\longrightarrow A$ は連続写像である.

（ii） 任意の図形 A,B について，A のすべての点を B の定まった1点 p_0 に写す定値写像 $f:A\longrightarrow B$ も連続写像である.

（iii） A が図形 B の部分集合なら，包含写像 $i:A\longrightarrow B$ も連続写像である．（包含写像の定義は §1.2 を見よ.）

《例 6》 A を図形とする．連続写像 $f:A\longrightarrow\boldsymbol{R}$ をしばしば，A 上の（実数値）連続関数とよぶ．点 $p\in A$ の像 $f(p)\in\boldsymbol{R}$ を点 p における f の値という．$f,g:A\longrightarrow\boldsymbol{R}$ が連続関数のとき，その和 $f+g$，差 $f-g$，積 $f\cdot g$ が次のように定義される．それらはまた連続である:

$$(f\pm g)(p)=f(p)\pm g(p)\quad\text{（値の和，差），}\qquad (f\cdot g)(p)=f(p)\cdot g(p)\quad\text{（値の積）}$$

また，0にならない連続関数 $h:A\longrightarrow\boldsymbol{R}$ の逆数の関数 $1/h$ も連続である.

《例 7》 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $[a,b]=\{x\in\boldsymbol{R}\mid a\leqq x\leqq b\}$ を閉区間という．G を $\boldsymbol{R}^n$ の任意の図形とするとき，$[a,b]$ から G への連続写像 $\varphi:[a,b]\longrightarrow G$ を G 内の連続曲線という．$\varphi(a),\varphi(b)$ をそれぞれ曲線 φ の始点，終点という．φ を，$\varphi(a)$ と $\varphi(b)$ を結ぶ G 内の曲線ということもある．閉区間 $[a,b]$ を時刻の集合と考えれば，φ は時刻が a から b まで経過するときの G 内のひとつの動点の動きを表わしている（図 2.12).

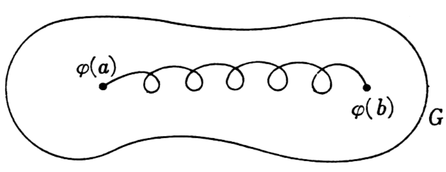


図 2.12　連続曲線

この定義によれば，定値写像 $\varphi:[a,b]\longrightarrow G$ も一種の（退化した）曲線である．始めから終りまで G 内のある1点にとどまっている曲線である.

【定理 2.1】 A,B,C を空でない任意の図形とする．$f:A\longrightarrow B$，$g:B\longrightarrow C$ が連続なら，合成 $g\circ f:A\longrightarrow C$ も連続である.

証明 粗っぽい‘証明’は次の通りである．点 x が A の中をほんの少し動くと，その像 $f(x)$ も B の中をわずかに動く．g も連続だから，さらにその像 $g(f(x))$ も C の中を少ししか動かない．結局，x がほんの少ししか動かなければ，$g(f(x))$ も少ししか動かない．これで合成写像 $g\circ f: A \longrightarrow C$ の連続性がわかった．

ε-δ 論法を使って証明すれば次のようになる．任意に固定した点 $x_0 \in A$ における $g\circ f: A \longrightarrow C$ の連続性をいえばよい．$f(x_0)=y_0$，$g(y_0)=z_0$ とおく．まず任意に $\varepsilon>0$ をとる．$g: B \longrightarrow C$ は y_0 で連続だから，この ε に応じて十分小さい $\delta_1>0$ を選べば，$d(y, y_0)<\delta_1 \Longrightarrow d(g(y), g(y_0))<\varepsilon$ が成り立つ．ただし y は B の点である．$f: A \longrightarrow B$ も連続であるから，この δ_1 に応じて十分小さい $\delta>0$ を選べば，$d(x, x_0)<\delta \Longrightarrow d(f(x), f(x_0))<\delta_1$ が成り立つ．ただし x は A の点である．$y_0=f(x_0)$ に注意して，この2つの事実を合わせると，$d(x, x_0)<\delta \Longrightarrow d(g(f(x)), g(f(x_0)))<\varepsilon$ となる．任意の $\varepsilon>0$ に応じて，このような $\delta>0$ が選べたから，$g\circ f: A \longrightarrow C$ は x_0 で連続である．x_0 は A の任意の点であったから，$g\circ f$ は連続写像である．証明終り．

【定義】 A, B を図形とする．写像 $f: A \longrightarrow B$ が全単射であって，f とその逆写像 $f^{-1}: B \longrightarrow A$ が，ともに連続写像であるとき，f を**同相写像**という．同相写像 $f: A \longrightarrow B$ があるとき，A と B とは**位相同形**であるという．記号で $A \approx B$ と書く．

《例 8》 図 2.13 のように平面上に3角形と円周を描く．3角形の内部の1点0に‘光源’を置き，3角形の周上の点 p に，円周上に映ったその影 p' を対応させる写像を f とする．f は明らかに全単射しかも連続である．p' に p を対応させる逆写像 f^{-1} も連続だから，f は同相写像である．したがって3角形の周囲と円周とは位相同形である．

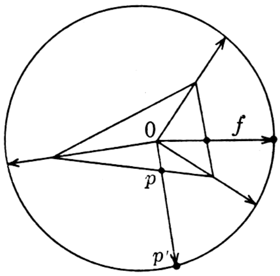


図 2.13

上の例のように，3角形と円周とは位相同形である．しかし，3角形はまっすぐな辺をもち，円周はどこでも曲っている．このように‘まっすぐ’とか‘曲っている’とかいう性質は互いに位相同形であるような図形同士でも同じとは限らない．これらの性質は，同相写像では保存されないのである．また周囲の長さも両方の図形で異なるから，‘長さ’という量も保存されない．

ところが，両方ともひとつながりの図形であることには変わりない．これは**連結性**とよばれる性質であるが，連結性は同相写像で保存される．同相写像で保存されるような図形の性質を**位相不変**な性質という．位相不変な性質は，図形を伸ばしたり縮めたりしても変わらない性質であって，図形のもつ最も根源的な性質と考えられる．トポロジーの主要な関心は，このような位相不変な性質に向けられているのである．

●ノート

図形 A, B, C について，$A \approx B$，$B \approx C$ なら $A \approx C$ であること（位相同形の推移律）．$f: A \longrightarrow B$，$g: B \longrightarrow C$ をそれぞれ同相写像とする．定理 2.1 から合成 $g\circ f: A \longrightarrow C$

は連続であり，かつ全単射である．$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ であった．これと，f^{-1}, g^{-1} が連続であることから，再び定理2.1によって $(g\circ f)^{-1}$ も連続である．これで合成 $g\circ f: A \longrightarrow C$ が同相写像であることがわかった．

§2.3　視界…ε

A を $\boldsymbol{R}^n$ の空集合でない勝手な図形とする．

【定義】 A の点 p と，正数 $\varepsilon>0$ をとる．点 p からの距離が ε 未満であるような A の点全体の集合を，**A の中での p の ε-近傍**とよぶ．記号で $N_\varepsilon(p\,;A)$ と書き表わす．N は neighbourhood（近所）の頭文字である．$\{x\mid\cdots\cdots\}$ 型の定義式で書けば

$$N_\varepsilon(p\,;A)=\{x\in A\mid d(x,p)<\varepsilon\}$$

となる．

$N_\varepsilon(p\,;A)$ は定義から図形 A の部分集合である．また，すぐわかるように，ε が小さいほど，$N_\varepsilon(p\,;A)$ も集合として‘小さい’．もし $\delta<\varepsilon$ なら $N_\delta(p\,;A)\subset N_\varepsilon(p\,;A)$ が成り立つ．

濃霧注意報で，よく‘視界 10 m’などと言う．深い霧のために見通しがきかず，自分を中心として半径 10 m の範囲しか見えないという意味である．近傍の考えもこれに似ている．図形 A に霧がかかって，視界が ε になってしまったとする．そのとき，A の点 p に立つ P 氏が A の中で見渡せるのは，自分からの距離が ε 未満の範囲である．（ちょうど ε だけ離れた所は見えないと約束する．）A の中での P 氏の視界が ε-近傍 $N_\varepsilon(p\,;A)$ にほかならない（図 2.14）．

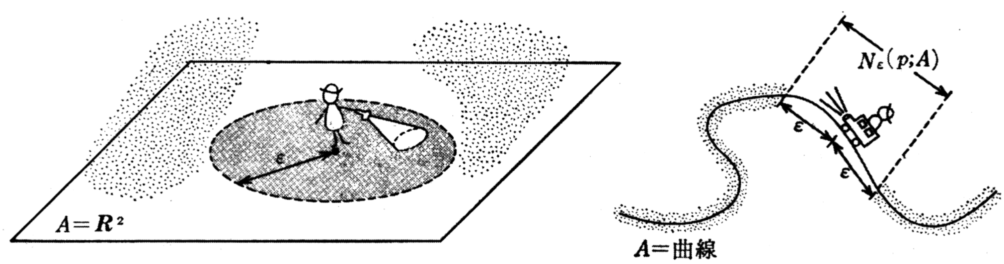


図 2.14　（左）野原の霧．灰色部分が $N_\varepsilon(p\,;A)$．（右）霧のハイウェー．

《例 1》　$A=\boldsymbol{R}^1$ の場合．原点0の ε-近傍を求める．

$$N_\varepsilon(0\,;\boldsymbol{R}^1)=\{x\in\boldsymbol{R}^1\mid d(x,0)<\varepsilon\}=\{x\in\boldsymbol{R}^1\mid |x|<\varepsilon\}=\{x\in\boldsymbol{R}^1\mid -\varepsilon<x<\varepsilon\}.$$

$$(d(x,0)=|x|)$$

この集合を $(-\varepsilon,\varepsilon)$ と書き，開区間という．

《例 2》　$A=\boldsymbol{R}^2$ の場合．$N_\varepsilon(p\,;\boldsymbol{R}^2)=p$ を中心とする半径 ε の円の内部（周は含まない）．これを開円板という．

《例 3》　$A=\boldsymbol{R}^3$ の場合．$N_\varepsilon(p\,;\boldsymbol{R}^3)=p$ を中心とする半径 ε のボールの内部（表面の球は含まない）．これを3次元の開円板という．円板という言葉には‘平たい’イメージがつきまとうが，この場合には体積のある球体である．円板という言葉は，このように拡張された意味

に使われることもある．

《例 4》 A が図 2.15 の 3 角形の周および内部の場合．点 p の位置と ε の大きさによって，$N_\varepsilon(p;A)$ の形も変わる．ε が小さく，p が周上にある場合には，$N_\varepsilon(p;A)$ は半円形または扇形である．ε が大きいとき，$N_\varepsilon(p;A)=A$ となることさえある．

$N_\varepsilon(p;A)$ は A の部分集合だから，A の外の点は考えなくてよい．

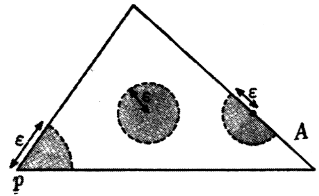


図 2.15

例 4 の絵（図 2.15）からもわかるように，A の中での p の ε-近傍は，A の入っている $\boldsymbol{R}^n$ の中での p の ε-近傍 $N_\varepsilon(p;\boldsymbol{R}^n)$ と A との共通部分になっている．すなわち次の公式が成り立つ．

$$(*)\qquad N_\varepsilon(p;A)=A\cap N_\varepsilon(p;\boldsymbol{R}^n)$$

右辺の意味を考えてみると，A に含まれる点であって，かつ p からの距離が ε 未満の $\boldsymbol{R}^n$ の点全体の集合というわけだから，左辺 $N_\varepsilon(p;A)$ の定義そのものである．

近傍の概念は基本的であって，トポロジーで必要ないろいろの概念を‘近傍’に基づいて定義することができる．たとえば，写像 $f:A\longrightarrow B$ の連続性の定義も近傍の言葉を使って次のように翻訳される．

連続性の定義（§2.2）を思い出すと，写像 $f:A\longrightarrow B$ が点 $p\in A$ において連続であるとは，どんな $\varepsilon>0$ についても，それに応じて十分小さく $\delta>0$ を選べば，$d(x,p)<\delta$ なる A の点 x（すなわち $N_\delta(p;A)$ に属す x）は，f によって $d(f(x),f(p))<\varepsilon$ なる B の点（すなわち $N_\varepsilon(f(p);B)$ の点）に写ることであった．

これから直ちに近傍の言葉による連続性の定義が得られる．

【定義】 $f:A\longrightarrow B$ が点 $p\in A$ において**連続**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に応じて，十分小さく δ を選べば，$f(N_\delta(p;A))\subset N_\varepsilon(f(p);B)$ が成り立つことである．

前節 §2.2 での定義よりも，場合によってはこの方が便利である．

§2.4 開集合と位相空間

A を適当なユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の図形とする．この § では‘A の開集合’というものを定義しよう．A の部分集合 U が **A の開集合**であるとは，簡単に言えば次のようなことである．U に属する任意の点について，その点が <u>A の中で</u>少し動いても U からとび出さない．そういう性質を U がもっているとき，U を A の開集合というのである．

《例 1》 $A=\boldsymbol{R}$ としよう．開区間 $(a,b)=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,a<x<b\}$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合である（図 2.16）．なぜなら不等式 $a<x<b$ を満たす x が $\boldsymbol{R}$ の中を少しくらい動いて x' になってもやはり同じ不等式 $a<x'<b$ を満たすからである．



図 2.16

《例 2》 閉区間 $[a,b]=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,a\leqq x\leqq b\}$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合では<u>ない</u>．$[a,b]$ に属する点

のうち，a, b 以外の点は，$\boldsymbol{R}$ の中で少しくらい動いても $[a, b]$ から出ないが，a と b はそうでない．a はほんの少しでも‘左に’動くと $[a, b]$ から出てしまうし，b は少しでも‘右に’動くと出てしまう（図 2.17）．

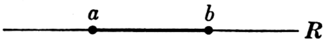


図 2.17

《例 3》 $A = \boldsymbol{R}^2$（平面）の場合．$\boldsymbol{R}^2$ 上の1点（たとえば原点）を中心とし，半径が $r(>0)$ の開円板は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合である（図 2.18）．

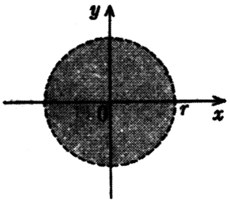


図 2.18 円周は含まない

《例 4》 x 軸上の開区間 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ は x 軸の開集合ではあるが，xy 平面の開集合ではない．

なぜなら，(a, b) に属する点が x 軸上で少し動いても，(a, b) から出ないが，xy 平面内で動けばその動く方向によっては（たとえば y 軸方向に動けば）どんなにわずかに動いても (a, b) から出てしまうから．（この § の始めに述べた開集合の定義を，とくに下線の部分に注意してもう一度見よ．）（図 2.19）

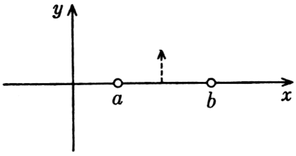


図 2.19

例4からわかるように，同じ集合でも，‘どんな集合の部分集合と考えるか’によって開集合であったり，なかったりする．(a, b) は $\boldsymbol{R}$ の開集合であるが，$\boldsymbol{R}^2$ の開集合ではない．A の開集合というように‘A の’を強調する理由がわかると思う．

《例 5》 A を図 2.20 の3角形とする．図 2.20 の U は3角形 A の開集合である．（U の点は3角形 A の中で少しくらい動いても U の外に出ない．）

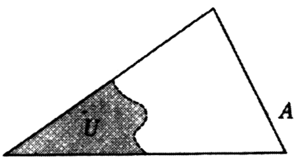


図 2.20

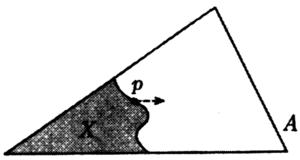


図 2.21

《例 6》 図 2.21 の X は3角形 A の開集合ではない．図 2.21 の点 p が A の中で少しでも‘右に’動けば X から出てしまうから．

‘A の開集合’の概念は，ε-近傍の言葉を使うことによって，より正確に定義できる．U の点 p が A の中で少し動いても U から外にとび出さないということは，すなわち，p に十分近い A の点がすべて U に入っているということである．したがって，ε-近傍の言葉で‘A の開集合’を定義すれば次のようになる．

【定義】 図形 A の部分集合 U が **A の開集合**であるとは，任意の $p \in U$ について十分小さい $\varepsilon > 0$ を選べば，$N_\varepsilon(p; A) \subset U$ となることである．

もし A の開集合 U の1点 p にひどい近視のP氏が立っていたとすれば，P氏に見える A の点はすべて U の点である．彼の視界が ε であればP氏には $N_\varepsilon(p; A)$ の点しか見えないが，ε が十分小さいとき $N_\varepsilon(p; A) \subset U$ となってしまうからである．

U が A の開集合でなければ，必ずしもそうは言えない．たとえば図 2.21 のような場合．図 2.21 に示された X の点 p に近視のP氏が立っていたとする．この場合彼がどんなにひ

どい近視でも，彼には X の点も X でない点（すなわち $A-X$ の点）も常に両方見える．任意の $\varepsilon>0$ について $N_\varepsilon(p\,;A)\cap X\neq\phi$ と $N_\varepsilon(p\,;A)\cap(A-X)\neq\phi$ が同時に成り立つからである．このような性質をもつ点 p を，A における X の**境界点**という．X の境界点に立つ人は常に（どんなに近視でも）X の点も X でない点も見ることができるのである．

U が A の開集合であるための必要十分条件は，A における U の境界点がひとつも U に属さないことである．

開集合の基本的性質

A を図形とする．A の開集合について次の性質は基本的である．

【定理 2.2】 (1) A 自身および空集合 ϕ は A の開集合である．

(2) $U_1, U_2, \cdots$（有限個または無限個）が A の開集合なら，和集合 $\bigcup_i U_i$ も A の開集合である．

(3) $U_1, U_2, \cdots, U_n$（有限個）が A の開集合なら，共通部分 $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ も A の開集合である．

証明 A の部分集合 U が A の開集合であることを示すには，任意の $p\in U$ について，$N_\varepsilon(p\,;A)\subset U$ となる $\varepsilon>0$ があればよい．（ε は p に依存する．）

(1) $N_\varepsilon(p\,;A)$ はもともと A の部分集合であった．よって任意の $p\in A$ と $\varepsilon>0$ について $N_\varepsilon(p\,;A)\subset A$．これから，$A$ が A 自身の開集合であることがわかる．

空集合 ϕ の場合は $p\in\phi$ という p がないから，示すべきことは何もない．よって ϕ は開集合．（このような論法は論理学の一原則である．）

(2) 任意の $p\in\bigcup_i U_i$ について，$N_\varepsilon(p\,;A)\subset\bigcup_i U_i$ という $\varepsilon>0$ があることをいう．$p\in\bigcup_i U_i$ だから p は少くともひとつの U_i に含まれている：$p\in U_i$．U_i は A の開集合だから，開集合の定義によって $N_\varepsilon(p\,;A)\subset U_i$ という $\varepsilon>0$ がある．この ε を使えば $N_\varepsilon(p\,;A)\subset\bigcup_i U_i$ は明らかである．（§1.1 の包含関係 $U_i\subset\bigcup_i U_i$ を使った．）

(3) 任意の $p\in\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ をとる．p はどの U_i にも含まれていて，しかも U_i は A の開集合だから，各 i について $N_{\varepsilon(i)}(p\,;A)\subset U_i$ という $\varepsilon(i)>0$ がある．$\varepsilon=\min\{\varepsilon(1),\varepsilon(2),\cdots,\varepsilon(n)\}$ とおく．$\varepsilon\leqq\varepsilon(i)$ であるから，$N_\varepsilon(p\,;A)\subset N_{\varepsilon(i)}(p\,;A)$ $(\subset U_i)$ である．よって $N_\varepsilon(p\,;A)$ はすべての $U_1, U_2, \cdots, U_n$ に含まれている．これから $N_\varepsilon(p\,;A)\subset\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ がわかり，$\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ は A の開集合である．証明終り．

開集合と連続性

開集合の概念は理論的に大切である．たとえば次の定理からわかるように，‘開集合’と‘連続性’とは密接に関連している．

【定理 2.3】 A, B をそれぞれ $\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n$ の図形とする．写像 $f: A\longrightarrow B$ が連続写像であるための必要十分条件は，B の勝手な開集合 U の f による逆像 $f^{-1}(U)$ が，A の開集合になることである．

写像 $f: A\longrightarrow B$ の連続性は開集合の言葉だけで判定されてしまうというのである．この

定理を証明するため，補助定理をひとつ準備しておこう．

【補助定理】 A を $\boldsymbol{R}^n$ の図形とする．任意の $p \in A$ と $\varepsilon > 0$ について p の ε-近傍 $N_\varepsilon(p\,;A)$ は A の開集合である．

p と ε を任意に選んで固定し，$U = N_\varepsilon(p\,;A)$ とおこう．定理 2.2 の証明でやったように，U が A の開集合であることをいうには，任意の $q \in U$ について $N_\delta(q\,;A) \subset U$ となる $\delta > 0$ があることを示せばよい．

$q \in U = N_\varepsilon(p\,;A)$ であるから，‘p の ε-近傍’ の定義によって $d(q,p) < \varepsilon$，すなわち $\varepsilon - d(q,p) > 0$ である．$\delta > 0$ を $0 < \delta < (\varepsilon - d(q,p))$ となるように選ぶ．この δ について $N_\delta(q\,;A) \subset U$ が成り立つのである．

これを示すには $x \in N_\delta(q\,;A) \Longrightarrow x \in U$ をいえばよい．実際 $x \in N_\delta(q\,;A)$ なら $d(x,q) < \delta$．δ は $\delta < \varepsilon - d(q,p)$ となるように選んでおいたから，δ より小さな $d(x,q)$ はもちろん $d(x,q) < \varepsilon - d(q,p)$ を満たす．$d(q,p)$ を移項して $d(x,q) + d(q,p) < \varepsilon$．これと3角不等式 $d(x,p) \leqq d(x,q) + d(q,p)$ を合わせて，$d(x,p) < \varepsilon$ を得る．これは $x \in N_\varepsilon(p\,;A) = U$ を意味している．結局 $N_\delta(q\,;A) \subset U$ が示せたから，U $(=N_\varepsilon(p\,;A))$ が A の開集合であることが証明できた．補助定理の証明終り．

定理 2.3 の証明をしよう．まず必要条件であることを示す．つまり $f: A \longrightarrow B$ が連続写像なら，B の勝手な開集合 U について，その逆像 $f^{-1}(U)$ が A の開集合になることをいうのである．任意の $p \in f^{-1}(U)$ について，$N_\delta(p\,;A) \subset f^{-1}(U)$ となるような $\delta > 0$ が見つかればよい．

$p \in f^{-1}(U)$ であるから逆像の定義によって $f(p) \in U$ である．仮定により U は B の開集合．よって適当に小さな $\varepsilon > 0$ をとれば $N_\varepsilon(f(p)\,;B) \subset U$ となる．

さて $f: A \longrightarrow B$ は連続写像である．とくに点 $p \in A$ において連続である．ここで近傍による連続性の定義（§2.3）を思い出すと，上で定めた $\varepsilon > 0$ に応じて十分小さな $\delta > 0$ を選べば $f(N_\delta(p\,;A)) \subset N_\varepsilon(f(p)\,;B)$ となる．ε の決め方から，この包含関係の右辺 $N_\varepsilon(f(p)\,;B)$ は U に含まれている．したがって左辺 $f(N_\delta(p\,;A))$ も U に含まれる．すなわち $f(N_\delta(p\,;A)) \subset U$．これは $N_\delta(p\,;A)$ のどの点も f で写せば U に入ることを示しているから，逆像の定義によって $N_\delta(p\,;A) \subset f^{-1}(U)$．

こうして求める $\delta > 0$ が見つかったので $f^{-1}(U)$ は A の開集合になる．

次に十分条件であることを示そう．写像 $f: A \longrightarrow B$ が与えられていて，B の勝手な開集合 U の f による逆像 $f^{-1}(U)$ が A の開集合になっていると仮定する．すると $f: A \longrightarrow B$ は連続写像であるというのである．

A の任意の点 $p \in A$ における連続性を証明する．任意の $\varepsilon > 0$ について適当に $\delta > 0$ をとれば $f(N_\delta(p\,;A)) \subset N_\varepsilon(f(p)\,;B)$ が成り立つことをいえばよい．そこで $\varepsilon > 0$ を任意に定め ε-近傍 $N_\varepsilon(f(p)\,;B)$ を考える．上に述べた補助定理によって $N_\varepsilon(f(p)\,;B)$ は B の開集合である．写像 $f: A \longrightarrow B$ に関する仮定から，逆像 $f^{-1}(N_\varepsilon(f(p)\,;B))$ は A の開集合になる．始めの点 p は明らかに $p \in f^{-1}(N_\varepsilon(f(p)\,;B))$ である．‘A の開集合’ の定義によ

って，適当に（小さく）$\delta>0$ をとれば，$N_\delta(p\,;A)\subset f^{-1}(N_\varepsilon(f(p)\,;B))$ となる．これを書きかえて，$f(N_\delta(p\,;A))\subset N_\varepsilon(f(p)\,;B)$．こうして求める $\delta>0$ が見つかって f の $p\in A$ における連続性が証明できた．証明終り．

位相空間

定理 2.3 は，開集合の言葉だけで写像の連続性を判定する定理であったが，ここで立場をかえて，定理 2.3 は連続性の新しい定義を示唆していると考えたらどうだろうか．

写像 $f:A\longrightarrow B$ について，B のどんな開集合の逆像も A の開集合になるとき，f を連続写像とよぶ，と改めて定義してみるのである．

この新しい定義は ε-δ 論法を含んでいない．距離の概念すら表面に出ていない．直接必要なのは開集合の概念だけである．そこで距離に基づくいままでの議論を逆転させて，開集合を全理論の基礎にすえるという可能性が考えられる．このような考えをおし進めると，我々は位相空間の概念に到達する．

位相空間は抽象的な概念であるが，その定義は難しくない．集合 X が位相空間であるというのは，その集合に"開集合"とよばれる一連の部分集合が指定されていることをいう．ここに"　"をつけて書いた"開集合"なるものは，具体的にどういう部分集合か一切センサクしない．いわば無定義術語であって単なる名前と思ってよい．

集合 X の部分集合のひとつひとつについて"開集合"であるなしの指定が，とにかくなされていればよいのである．ただし，このような"開集合"の指定は全く行きあたりばったりにやってよいのではなく，定理 2.2 の開集合の基本性質 (1), (2), (3) だけは満たされねばならないものとする．"開集合"というからには，基本性質 (1), (2), (3) くらいは満たしてほしいというわけである．

そこで次の 3 つを"開集合"の公理とする．

(1) X 自身と空集合 ϕ は，X の"開集合"である．

(2) X の"開集合"の有限個または無限個の和集合は，X の"開集合"である．

(3) X の"開集合"の有限個の共通部分は，X の"開集合"である．

この 3 条件が"開集合"を指定する際の唯一の制約である．

集合 X が与えられたとき，上の 3 条件を満たす"開集合"の指定の仕方はひと通りとは限らない．たとえば極端なやり方として，空集合 ϕ と X 自身を"開集合"と指定し，それ以外のどんな部分集合も"開集合"には指定しない，という仕方が考えられる．このような極端な指定をしても上の (1), (2), (3) は満たされる．

また，もうひとつの極端な場合として，X のすべての部分集合を"開集合"に指定してしまう方法もある．この場合も (1), (2), (3) は成り立つ．この 2 つは"開集合"を指定する両極端の方法であって，その中間にいろいろな段階の指定の仕方がある．X の"開集合"の指定の仕方を X の**位相**という．上の両極端の指定方法はそれぞれ，**密着位相**，**離散位相**とよばれる位相である．

"開集合"の指定の仕方（つまり位相）がひとつ決められた集合 X を**位相空間**という．同じ集合 X でも，その上に与えられた位相が異なれば，位相空間としては異なるものと考えることにする．

《**例 1**》 A をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする．この§でやったように，ε-近傍の概念に基づいて A の開集合が自然に定義できる．A の部分集合のひとつひとつについて，それが A の開集合であるかないか決まっているわけだから，そこにひとつの位相が与えられている．これを**自然な位相**とよぶ．

$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合に自然な位相を与えた位相空間が図形にほかならない．

《**例 2**》 $n \geqq 1$ とし，$\boldsymbol{R}^n$ に'自然でない'位相を入れてみよう．$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 U が，空集合 ϕ であるか，または $\boldsymbol{R}^n$ から有限個の点を除いた補集合であるとき"開集合"と定義するのである．このように"開集合"を定めても条件 (1), (2), (3) は満たされる．半径1の開円板などは自然な位相では開集合であるが，この位相では"開集合"ではない．

この例からも推測されるように，抽象的な位相空間の仲間には，とんでもない奇妙な'空間'がたくさんある．位相空間は，我々の空間概念を極限にまで拡大したものである．

さて，位相空間が定義されると，それらの間の連続写像も自然に定義される．X, Y を位相空間とする．写像 $f: X \longrightarrow Y$ について，Y の勝手な"開集合" U の逆像 $f^{-1}(U)$ が X の"開集合"になるとき，f を連続写像ということにすればよい．定理 2.3 によって，X, Y がともに図形であれば，この意味での連続写像は ε-δ 論法による連続写像に一致する．

位相空間 X, Y の間の写像 $f: X \longrightarrow Y$ が全単射であって，f も $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ も連続のとき，前と同様に f を同相写像とよぶことにする (cf. §2.2.)．そして X と Y とは（f によって）位相同形であるという．記号で $X \approx Y$ と書く．

$f: X \longrightarrow Y$ が同相写像なら，とくに f は連続であるから，Y の任意の"開集合" U についてその逆像 $f^{-1}(U)$ は X の"開集合"になる．また $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ も連続であるから，X の任意の"開集合" V の像 $f(V)$ は Y の"開集合"である．（なぜなら $f(V)$ は，連続写像 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ による V の逆像 $(f^{-1})^{-1}(V)$ に一致するから．）:

$$U\text{: } Y \text{ の"開集合"} \Longrightarrow f^{-1}(U)\text{: } X \text{ の"開集合"}$$
$$V\text{: } X \text{ の"開集合"} \Longrightarrow f(V)\text{: } Y \text{ の"開集合"}$$

こうして，同相写像 $f: X \longrightarrow Y$ があれば，X と Y の"開集合"のシステムがぴったり対応することになる．言いかえれば両者の"開集合"の指定の仕方，すなわち位相は全く同じである．2つの位相空間 X, Y が位相同形であることは，X と Y が位相空間として全く同じ構造をもつことにほかならない．

§2.2 で，同相写像で保存される性質を位相不変な性質とよんだが，それは'位相空間としての性質'と言うべきものなのである．

抽象的な位相空間とその間の連続写像から出発して，位相空間のいろいろな性質を研究する分野を位相空間論という．この本では主に図形しか扱わないので，一般的な位相空間論に深入りはしないが，その考え方はトポロジー全体の根底にある．

第3章

多様体はめぐる

§3.1　果てしなき宇宙…

おじさん　おや，きょうは二人で来たの．こんにちは．

タロウ　おじさん，こんにちは．

ハナ子　こんにちは．

おじさん　このまえ，テレビで南極からの中継してたの見た？

タロウ　うん．

おじさん　タロウ君なんか，南極で人がさかさまになっていないので不思議だったんじゃないの？

タロウ　いやだなあ，おじさんて．ぼく来年から4年生だよ．

おじさん　ごめん，ごめん．だけど，本当に不思議じゃないの？

タロウ　だって地球はまるいんだもん．それでみんな地球に立っていて，それで上の方に空があって，ええと，なんだかわからないけど不思議じゃないよ．

おじさん　タロウ君は地球がまるいなんて誰に教えてもらったの？

タロウ　誰にも教わらないけど，でもそうなんでしょ．

おじさん　誰にも教わらないけど，か．宇宙時代の子供だなあ．でも，昔の人は地球はずっと平らだと思っていたんだよ．

タロウ　うん，ぼくもこのまえ図鑑で見たよ．海なんかどんどん行くと，平らな所が終っちゃって，水がどんどん流れ出しているんだって．どうして海の水がなくならないか不思議だよね．

ハナ子　ほら，あのプレート・テクトニクスみたいに，どこかからどんどん涌き出しているっていうんじゃないの？

おじさん　おや，ハナ子ちゃんも大学に入ったら難しいことを言うようになったね．なんだか大変なことになりそうだ．ところでタロウ君，どうして昔の人が地球を平らだと思ったかわかる？

タロウ　だってまだ進歩してなかったんだもん．

ハナ子　そういうの，トートロジーって言うのよ．

おじさん　このまえ来たときもトートロジーって言ってたぞ．トートロジーって言葉が好きらしいね．ハナ子ちゃんはどう？　わかる？

ハナ子　そうね，ええと，地球があんまり大き過ぎるからじゃないかしら．だって‘星の王子さま’に出てくるような小さな星だと，すぐにまるいってわかっちゃうでしょ．

おじさん　きっとね．たぶんそうだね．昔の人の行動の範囲は狭かったろうしね．だけど高い山の上とか海岸とかに出てみて，いっぺんに広い範囲が見渡せる所では，地球がまるいことが微かにわかるってこともあるからね．何人かの人は地球はまるいと思っていたんだろうね，きっと．

ハナ子　最近，テレビの天気予報なんかでも人工衛星から写した日本の写真を使っているけど，あれなんかほんとに地球がまるいってかんじね．

おじさん　だから地球の形っていうのは，全体から見ればまるくって，自分達のまわりの狭い範囲だけ見てると平らに見えるというわけだね．<u>大域的</u>（global）と<u>局所的</u>（local）というんだけど．地球は大域的にはまるいけど，局所的には平らに見えるわけ．

ハナ子　それを昔の人達は自分達のまわりの…局所的って言うの？　その局所的な様子をそのままどんどん拡げていって地球全体の形を考えたのね．平らなのをどんどん拡げたから平面になっちゃったんでしょ？

おじさん　そうそう，そういうわけ．ユークリッド幾何なんかも，エジプトあたりで測量術とかそういうことから得られた知識を，無限に広い平面上に整然と組み立てて見せたんだけれど，こっちの方はもっと理論的だけど，なんだか類似性があるね．ニュートンだってそうだね．

ハナ子　え，ニュートンって？

タロウ　ぼく知ってるよ．頭の毛が長くって，ほら音楽家みたいな人．おじさん，あの人偉いんでしょ．おねえさん知らないの？

ハナ子　ニュートンなら知ってるけど，だって急にニュートンなんかが出て来たから….

おじさん　うん，つまり，ニュートンはこの宇宙をどう考えたかというと….なんてエラそうに言ってもぼくも知らないんだけど．だけど，きっとこの宇宙は3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ であるっていうふうにバクゼンと考えていたんじゃないかな．そこに時間を加えても $\boldsymbol{R}^4$ とか，そんなふうだったんじゃないかと思うな．

ハナ子　あ，そうか．だからこの宇宙もさっきの言葉で言うと，局所的には3次元ユークリッド空間なんだけど，ニュートンさんはそれをどこまでもどんどん拡げていって宇宙全体を $\boldsymbol{R}^3$ にしちゃったというのね．

おじさん　そうなんだよ．宇宙が大域的にも $\boldsymbol{R}^3$ かというと，そんなこと言えないと思うだろう？　さっきの地球がまるいって話でさ．

ハナ子　あ，そうね．だけど，さっきのは平面でしょ．平面がだんだん曲がっていって，全体としてまるくなっちゃうんでしょ．今度のは3次元なのよね．3次元の $\boldsymbol{R}^3$ が曲がるって言っても，あまりピンとこないなあ．どっちの方に曲がるの？

おじさん　どっちの方って言っても，はいこっちですって指すわけにはいかないよ．ぼく達が

すっぽり入ってるんだもの．アインシュタインは時間と空間を一緒にして，4次元の空間が全体として曲がっているようなのが宇宙だと考えているよ．

タロウ　宇宙ってどんどん行くとどうなっているの？

おじさん　おじさんだってどんどん行ったことないから知らないけど，どこまで行っても宇宙はあるよ，きっと．昔の人の考えた海の果てみたいに，ここから先は進めませんってことはないよ．どんどん行けるよ．もっとも，もとにもどって来るかも知れないけどね．

タロウ　ふうん，それでどんどん行くと宇宙人みたいなのがいるのかしら．スペース・インベーダーみたいにやっつけられたりして．

おじさん　なに，そのスペース・インベーダーっていうの．

ハナ子　あ，おじさん知らないの？　あのピコピコっていうの．

おじさん　うーん．なんだかわかんないけど．ちょっと，アイコさん，ハナ子ちゃん達にリンゴでもむいてあげてよ．

§3.2　多　様　体

多様体（manifold）という幾何学的対象を定義しよう．簡単に言えば，局所的にユークリッド空間と位相同形であるような図形を多様体という．

おじさん達の話に出てきたように，地球の表面は山や川やトンネルなどのデコボコを無視すれば，局所的には平面 $\boldsymbol{R}^2$ と考えられるし，また我々の住む宇宙も，近似的な意味では局所的に $\boldsymbol{R}^4$（時間もこめて）と位相同形であると考えられる．これらは多様体の近似的モデルである．局所的にはユークリッド空間にみえるこのような空間は，全体として（大域的には）一体どんな形をしているのだろうか？　これが多様体のトポロジーとよばれる分野の根本的問題である．

【定義】　M を図形とする．M のどんな点 p についても，p を含む M の開集合で $\boldsymbol{R}^n$ と位相同形なものが存在するとき，M を n **次元多様体**という．

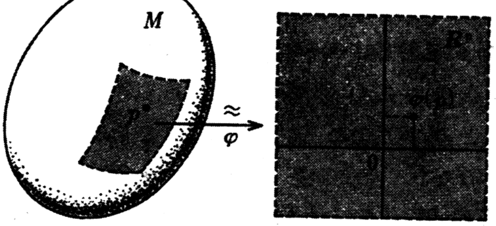


図 3.1　n 次元多様体

多様体 M の1点 p にいるP氏を想像してみよう．多様体の定義によって，p を含む Mの開集合 U で $\boldsymbol{R}^n$ と位相同形なものがある．ちょうど，我々が肉眼で宇宙空間を眺めるときのように，P氏の M におけ視界が極めて小さいと仮定する．すると開集合の定義（§2.4）により，P氏は M の中で U の点しか見ることができない．U は $\boldsymbol{R}^n$ と位相同形であるから，U の点しか見えないP氏には自分の入っている空間が $\boldsymbol{R}^n$ なのか，それとも別の n 次元多様体なのか，それを区別することは少くとも位相的には不可能であろう．多様体は局所的にユークリッド空間に見えるとはこういう意味であるが，このようにある図形

なり位相空間なりの局所的な性質を論ずるとき，開集合はごく自然に現われてくる．そこで一般に，位相空間 X において，点 p を含む X の“開集合”を p の**開近傍**とよぶことがある．

M を n 次元多様体とし，U を $\boldsymbol{R}^n$ と位相同形な M の開集合とする．同相写像 $\varphi: U \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ がある．U の任意の点 p の位置は座標によって記述することができる．すなわち，p を φ で写した $\boldsymbol{R}^n$ の点 $\varphi(p)$ の，$\boldsymbol{R}^n$ における座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を p の座標と思えばよい．(図 3.1 を見よ.) 言いかえれば U には n 次元の座標（**局所座標**という）が入る．この意味で，このような開集合 U を**座標近傍**とよぶことがある．多様体とは各点 p について p を含む座標近傍が存在するような図形にほかならない．

《例 1》 n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ は n 次元多様体である．これはあたりまえ．

《例 2》（n 次元開円板） 最も標準的な n 次元開円板として，$\boldsymbol{R}^n$ の原点 0 を中心とし半径が 1 の開円板を考え，それを O^n としよう：$O^n = \{p \in \boldsymbol{R}^n \mid d(p, 0) < 1\}$．$O^n$ は n 次元多様体である．実際，O^n 自身が $\boldsymbol{R}^n$ と位相同形であることが証明できる．

$O^n \approx \boldsymbol{R}^n$ の証明　写像 $f: O^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ を次のように定義する．任意の $p \in O^n$ をとる．p の原点 0 からの距離 $d(p, 0)$ を α とすると，$0 \leqq \alpha < 1$ である．空間 $\boldsymbol{R}^n$ の中で線分 $0p$ を p の方向へ延長し，その延長上に点 q を $d(q, 0) = \alpha/(1-\alpha)$ となるようにとる．点 p に点 q を対応させる写像を $f: O^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ とするのである（図 3.2）．f は原点 0 を動かさない連続写像である．点 p が O^n の中で‘境界’の方へ近づくにつれて $\alpha \to 1$ となるから，$f(p)$ の原点からの距離 $\alpha/(1-\alpha)$ はどんどん大きくなる．

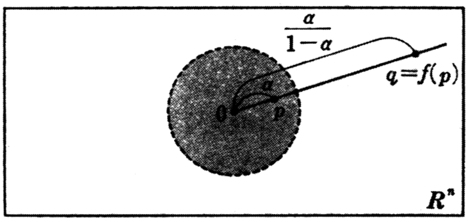


図 3.2

逆向きの写像 $g: \boldsymbol{R}^n \longrightarrow O^n$ を次のように決める．$\boldsymbol{R}^n$ の任意の点を q とし，$d(q, 0) = \beta$ とする（$\beta \geqq 0$）．線分 $0q$ 上に，原点 0 からの距離が $\beta/(1+\beta)$ であるような点 p をとり，q に p を対応させる写像を g とするのである．どんな $\beta \geqq 0$ についても $0 \leqq \dfrac{\beta}{1+\beta} < 1$ だから $p = g(q)$ は O^n の点である．g も原点を動かさない連続写像である．

f と g が互いに逆写像であることを示そう．

そのため，合成写像 $g \circ f: O^n \longrightarrow O^n$ を考える．点 $p \in O^n$ を任意にとり，$d(p, 0) = \alpha$，$d(f(p), 0) = \beta$ とする．f の定義によれば $\beta = \alpha/(1-\alpha)$ である．$f(p)$ をさらに g で写し，点 $g(f(p)) \in O^n$ を考える．g の定義に従って $d(g(f(p)), 0)$ を計算すると，

$$d(g(f(p)), 0) = \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{\left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)}{1+\left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)+\alpha} = \alpha$$

すなわち，$d(g(f(p)), 0) = d(p, 0)$ である．3 点 $0, p, g(f(p))$ は 0 を始点とするひとつの半直線上にあるから，$d(g(f(p)), 0) = d(p, 0)$ なら $g(f(p)) = p$ でなければならない．よ

って $g\circ f = \mathrm{id}_{O^n}$ がわかった．同様にして $f\circ g = \mathrm{id}_{\boldsymbol{R}^n}$ もわかる．

§1.2 の問題でやったように，$g\circ f = \mathrm{id}_{O^n}$，$f\circ g = \mathrm{id}_{\boldsymbol{R}^n}$ から，f と g はともに全単射であり，$f = g^{-1}$，$g = f^{-1}$ が導かれる．f も g も連続写像であるから，これより，$f: O^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ が同相写像であることがわかる．$O^n \approx \boldsymbol{R}^n$ が証明できた．

《例 3》 $\boldsymbol{R}^n$ の開集合は n 次元多様体である．

U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とする．$\boldsymbol{R}^n$ の開集合の定義から，任意の点 $p\in U$ について十分小さな $\varepsilon > 0$ をとれば $N_\varepsilon(p;\boldsymbol{R}^n) \subset U$ となる．$N_\varepsilon(p;\boldsymbol{R}^n)$ は U の開集合であって，しかも n 次元開円板 O^n に位相同形である（図 3.3）．例2で示したように $O^n \approx \boldsymbol{R}^n$ であるから §2.2 のノートで述べた位相同形の推移律によって $N_\varepsilon(p;\boldsymbol{R}^n) \approx \boldsymbol{R}^n$ である．これで，U の各点 p が $\boldsymbol{R}^n$ と位相同形な開集合 $N_\varepsilon(p;\boldsymbol{R}^n)$ に含まれることがわかった．

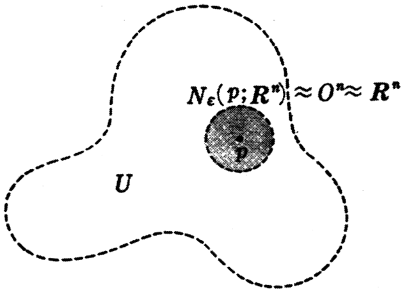


図 3.3

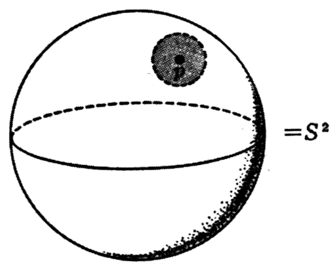


図 3.4

《例 4》 通常の球面は2次元多様体である．（通常の球面を記号で S^2 と書く．）

‘地球の表面’でおなじみの例である．S^2 が2次元多様体であることを直観的に理解することは簡単である．図 3.4 のように，S^2 の各点 p を中心として適当な半径の開円板を S^2 の表面上に描けば，これが $\boldsymbol{R}^2$ と位相同形な p の開近傍になるからである．

後で一般次元の球面を考える関係上，S^2 が2次元多様体であることを，座標を使う方法で証明しておこう．$\boldsymbol{R}^3$ の原点0を中心とし半径が1の球面 $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ を考えることにする．

S^2 上の任意の点を $p = (x,y,z)$ とすると，p は原点ではあり得ないから x,y,z のどれかひとつは0でない．いま，$z > 0$ であると仮定しよう．

S^2 の部分集合 S_+ を $S_+ = \{(x,y,z)\in S^2 \mid z > 0\}$ と定義する．S_+ は S^2 の‘上半球’である（図 3.5）．

また，S_+ は S^2 の開集合である．なぜなら，$\boldsymbol{R}^3$ の‘上半空間’$\boldsymbol{R}^3{}_+$ を $\boldsymbol{R}^3{}_+ = \{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \mid z > 0\}$ と定義すると，上半球 S_+ は $\boldsymbol{R}^3{}_+$ と S^2 の共通部分 $\boldsymbol{R}^3{}_+ \cap S^2$ に一致し，しかも $\boldsymbol{R}^3{}_+$ は $\boldsymbol{R}^3$ の開集合である．したがって次の補助定理に

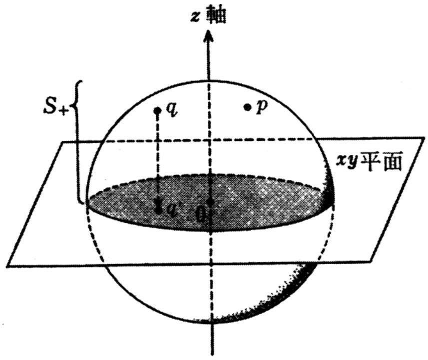


図 3.5

より S_+ は S^2 の開集合になる．

【補助定理】 A を $\boldsymbol{R}^n$ の図形とする．U を $\boldsymbol{R}^n$ の任意の開集合とすれば，共通部分 $U \cap A$ は A の開集合になる．

この証明は後まわしにして先に進もう．S_+ が点 p を含む S^2 の開集合であることがわかった．

次に S_+ が xy 平面上の半径1の開円板 O^2（図 3.5 灰色部分）に位相同形になることを証明しよう．そのために写像 $f : S_+ \longrightarrow O^2$ を，S_+ の任意の点 q に，q から xy 平面に下した垂線の足 q' を対応させることによって定義する（図 3.5）．座標で書けば簡単で $f(x, y, z) = (x, y)$ である．

逆に q' に q を対応させる写像を $g : O^2 \longrightarrow S_+$ とする．すなわち，O^2 の任意の点 q' に，q' において xy 平面に立てた垂線と S_+ との交点 q を対応させる写像を考えるのである．座標で書けば $g(x, y) = (x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)})$ である．

容易にわかるように f, g ともに連続で，しかも互いに逆写像になっている．これから f, g が同相写像であることが結論される．

こうして $S_+ \approx O^2$ がわかったが，一方 $O^2 \approx \boldsymbol{R}^2$ であるから，位相同形の推移律によって $S_+ \approx \boldsymbol{R}^2$ が成り立つ．これで，$z > 0$ に対応する‘上半球’S_+ がひとつの座標近傍になることが証明できた．

まったく同様の議論で，$x > 0$, $x < 0$, $y > 0$, $y < 0$, $z < 0$ のそれぞれに対応する半球が $\boldsymbol{R}^2$ と位相同形な S^2 の開集合になることも証明できる．S^2 上の任意の点はこれらの半球の少くともひとつに含まれるから，定義によって S^2 は2次元多様体である．

補助定理の証明をしておこう．A を $\boldsymbol{R}^n$ の図形，U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とすれば，$U \cap A$ が A の開集合になることを示すのである．

$U \cap A = \phi$ ならもちろん A の開集合である．$U \cap A \neq \phi$ の場合 p を $U \cap A$ の任意の点とする．p は U に含まれていて，U は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合であるから $N_\varepsilon(p ; \boldsymbol{R}^n) \subset U$ という $\varepsilon > 0$ がある．この包含関係の両辺と A との共通部分を考えてみよう．すると $N_\varepsilon(p ; \boldsymbol{R}^n) \cap A \subset U \cap A$ が得られる．§2.3 で述べた公式（$*$）によって左辺の $N_\varepsilon(p ; \boldsymbol{R}^n) \cap A$ は $N_\varepsilon(p ; A)$ に等しい．こうして，任意の $p \in U \cap A$ について $N_\varepsilon(p ; A) \subset U \cap A$ となる $\varepsilon > 0$ が見つかったから，$U \cap A$ は A の開集合である．証明終り．

《例 5》 n 次元球面 S^n

S^n は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の中で，原点0からの距離が一定（たとえば1）であるような点の集合である：$S^n = \{p \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid d(p, 0) = 1\}$．$S^n$ は n 次元多様体である．

証明の原理は S^2 の場合と変わらない（cf. 例 4）．イメージとしては図 3.5 を頭においているが，高次元のため正確な図が描きにくい．座標による表示を手がかりに議論をすすめよう．S^n を座標で書くと $S^n = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \mid x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2 + x_{n+1}{}^2 = 1\}$．

S^n の点 p を勝手にとり，p が $\boldsymbol{R}^n$ と位相同形な S^n の開集合に含まれることを示せばよい．p は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の原点ではあり得ないから，p の座標 $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ のうち，どれか少く

ともひとつの x_i は0でない．仮に $x_{n+1}>0$ とする．

$S_+=\{(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\,|\,x_1^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2=1,\ x_{n+1}>0\}$ という S^n の部分集合を考える．(‘半球’である．) S_+ は明らかに p を含んでいる．S^2 のときと同じ議論で，S_+ が S^n の開集合であることが示せる．実際，S_+ は $\{(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\,|\,x_{n+1}>0\}$ という $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の開集合と S^n の共通部分であるから，補助定理によって S^n の開集合である．

次に $S_+\approx\boldsymbol{R}^n$ を示したい．位相同形の推移律によって $S_+\approx O^n$ さえ示せばよい．ここに O^n は n 次元開円板 $\{(x_1,\cdots,x_n)\,|\,x_1^2+\cdots+x_n^2<1\}$ である．

次の2つの写像を考える．

$$f:S_+\longrightarrow O^n,\qquad f(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})=(x_1,\cdots,x_n)$$

$$g:O^n\longrightarrow S_+,\qquad g(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n,\sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_n^2)})$$

S_+ の任意の点 $(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})$ は $x_{n+1}=\sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$，$x_1^2+\cdots+x_n^2<1$ を満たす．これからすぐに f と g が互いに他の逆写像であることがわかる．また，f と g の表示からそれらが連続であることもわかる．したがって f,g ともに同相写像である．こうして $S_+\approx O^n$ が示され，S_+ が点 p を含む座標近傍であることがわかった．

$x_1>0$，$x_1<0$，$\cdots$，$x_n>0$，$x_n<0$，$x_{n+1}>0$，$x_{n+1}<0$ という各不等式に対応する $2(n+1)$ 個の S^n の開集合（‘半球’）を考えると，上と同様の議論で，それぞれが座標近傍であることが証明できる．S^n のどの点もこれら $2(n+1)$ 個の座標近傍の少くともひとつに含まれているから，定義によって S^n は n 次元多様体である．

$n=0,1,2$ の場合，S^0,S^1,S^2 はそれぞれ2点，円周，通常の球面である．

S^3 になると少しわかりにくいが，‘表面’が3次元空間であるような‘球面’である．S^3 から1点を取り除くと $\boldsymbol{R}^3$ に位相同形になる．同様のことは S^n についてもいえる．

§3.3 トーラスと直積

2次元多様体の有名な例にトーラス（輪環面）がある．

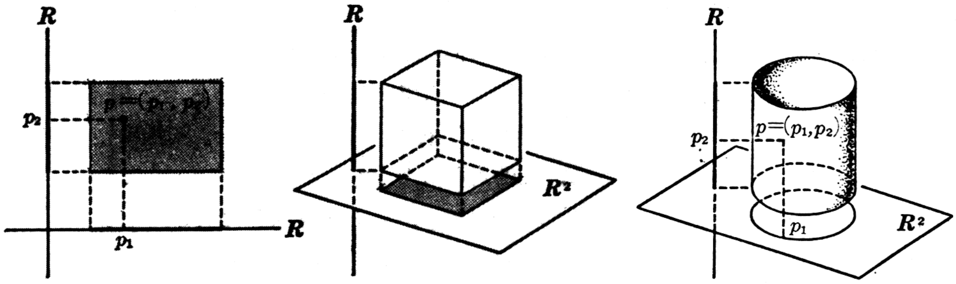
【定義】 2つの円周 S^1 の直積 $S^1\times S^1$ を**トーラス**といい，記号で T^2 と書き表わす．

まずこの機会に直積について少し考えておこう．あとでホモトピーの議論をしたり，新しい多様体を構成したりするときにも直積の概念は大切であるから．

§2.1 では n 個の集合の直積を定義したが，ここでは簡単のため，$n=2$ の場合について考える．

集合 A_1,A_2 の直積 $A_1\times A_2$ とは，A_1 の要素 p_1 と A_2 の要素 p_2 の対 (p_1,p_2) の全体であった．もし，A_1 が $\boldsymbol{R}^m$ の図形であり A_2 が $\boldsymbol{R}^n$ の図形であれば，直積 $A_1\times A_2$ は $\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^{m+n}$ の図形になる．ただし，$\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n$ の要素は $(x_1,\cdots,x_m)$ と $(y_1,\cdots,y_n)$ の対 $((x_1,\cdots,x_m),(y_1,\cdots,y_n))$ であるが，これを $(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)$ に対応させて $\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{R}^{m+n}$ を同一視するのである（図 3.6)．

図 3.6 から直観的にも明らかなように，直積 $A_1\times A_2$ の点 $p=(p_1,p_2)$ が $A_1\times A_2$ の



(線分)×(線分)=(長方形)　(長方形)×(線分)=(直方体)　(円周)×(線分)=(円筒)

図 3.6　図形の直積

中でほんの少し動くことと，p_1, p_2 がそれぞれ A_1, A_2 の中でほんの少し動くこととは同値である．これから次の 1), 2) がわかる．

1)　U_1 が A_1 の開集合，U_2 が A_2 の開集合なら，$U_1 \times U_2$ は $A_1 \times A_2$ の開集合である(図 3.7)．

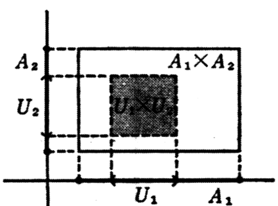


図 3.7

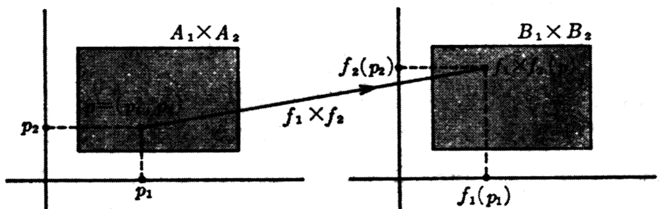


図 3.8

2)　2つの写像 $f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ と $f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$ の直積 $f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ を $f_1 \times f_2(p_1, p_2) = (f_1(p_1), f_2(p_2))$ によって定義する．そのとき，f_1, f_2 がともに連続写像なら $f_1 \times f_2$ も連続写像である(図 3.8)．

$f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$，$f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$ が両方とも全単射なら直積 $f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ も全単射になり，しかも $(f_1 \times f_2)^{-1} = f_1^{-1} \times f_2^{-1}$ である．このことと 2) から次の 3) がわかる．

3)　f_1, f_2 が同相写像なら $f_1 \times f_2$ も同相写像になる．

M と N をそれぞれ m 次元，n 次元の多様体とする．直積 $M \times N$ の任意の点 $p = (p_1, p_2)$ を考える．M はm 次元多様体だから，p_1 を含む M の開集合 U で $U \approx \boldsymbol{R}^m$ となるものがある．同様に p_2 を含む N の開集合 V で $V \approx \boldsymbol{R}^n$ となるものがある．1) により $U \times V$ は $M \times N$ の開集合で，明らかに点 $p = (p_1, p_2)$ を含んでいる．そして 3) によって $U \times V \approx \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^{m+n}$．これから次の 4) がわかる．

4)　m 次元多様体 M と n 次元多様体 N の直積 $M \times N$ は $m+n$ 次元多様体である．

直積 $A_1 \times A_2$ の点 $p = (p_1, p_2)$ に $p_1 \in A_1$ を対応させる写像を $\mathrm{pr}_1 : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_1$ と書いて**第1射影**とよぶ．同様に，点 p に p_2 を対応させる写像を**第2射影** $\mathrm{pr}_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_2$ という．(pr. は projection の略) これらは明らかに連続写像である．

トーラスにもどろう．円周 S^1 は1次元多様体であるから，上の 4) によって，その直積 $S^1\times S^1$ は2次元多様体になる．S^1 を $\boldsymbol{R}^2$ の図形と考えれば $S^1\times S^1$ は $\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}^4$ の図形である．しかし，それに位相同形な図形を $\boldsymbol{R}^3$ の中に構成することができる．$\boldsymbol{R}^3$ の中のひとつの平面上に，円周 S とそれに交わらない直線 l を描く．そして $\boldsymbol{R}^3$ の中で l を軸として S を1回転させて得られる回転図形 M がそれである．$M\approx S^1\times S^1$ は明らかであろう（図 3.9 を見よ）．以下では M と $S^1\times S^1$ をとくに区別せず両方ともトーラスとよび，同じ記号 T^2 で表わすことにする．

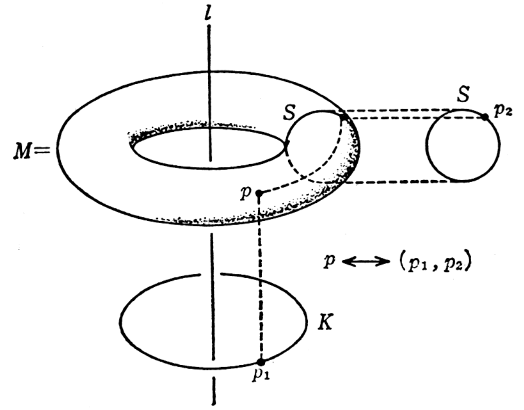


図 3.9　$M\approx K\times S\approx S^1\times S^1$

その定義からも想像されるように，トーラスの性質は円周 S^1 の性質に似たところがある．S^1 には長いひもがぐるぐる巻きつけられるが，トーラスには平面が巻きつけられるのである．

円周を $S^1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ とし，この S^1 に数直線 $\boldsymbol{R}$ を巻きつけてみよう．

写像 $e:\boldsymbol{R}\longrightarrow S^1$ を $e(t)=(\cos t,\sin t)$ と定義する．e が $\boldsymbol{R}$ を巻きつける写像である．t が原点0から出発して数直線 $\boldsymbol{R}$ の上を正の方向に進んで行くと，$e(t)$ は S^1 上の点 $p_0=(1,0)$ から出発して円周上を正の向きにまわりだす．$t=2\pi$ になると $e(t)$ は出発点 $p_0=(1,0)$ にもどってくる（図 3.10）．$e:\boldsymbol{R}\longrightarrow S^1$ は 2π の整数倍だけずれた $\boldsymbol{R}$ の点をすべて同一視して S^1 の同じ点に写す．したがって，$\cdots$, $t-2\pi$, t, $t+2\pi$, $t+4\pi$, $\cdots$ という無限個の点が e によって同一視される．（再び図 3.10 を見よ．）

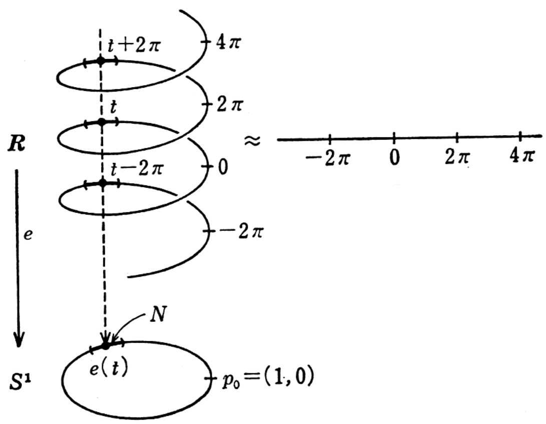


図 3.10

$e:\boldsymbol{R}\longrightarrow S^1$ は同相写像ではない．しかし同相写像に似た性質をもっている．いわば局所的な同相写像である．S^1 の任意の点 $p=e(t)$ の，十分小さな ε-近傍 $N=N_\varepsilon(p;S^1)$ をとると，$e:\boldsymbol{R}\longrightarrow S^1$ による N の逆像 $e^{-1}(N)$ は無限個の開区間に分かれる（図 3.10）．e をその個々の開区間に制限すると，その開区間から N への同相写像になっている．このような性質をもつ‘局所的な同相写像’を**被覆写像**とよぶ．

写像 $e:\boldsymbol{R}\longrightarrow S^1$ を2つ用意して，その直積を作ると，写像 $e\times e:\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\longrightarrow S^1\times S^1$ が得られる．写像 $e\times e$ を簡単に f と書こう．この f が平面を $T^2=S^1\times S^1$ に巻きつける写像である．f は，x,y 座標がそれぞれ 2π の整数倍ずれた無限個の点をすべて同一視し

て T^2 上の 1 点に写す.

T^2 上の任意の 1 点 p の T^2 の中での十分小さい ε-近傍 N は開円板に位相同形である. N の逆像 $f^{-1}(N)$ は図 3.11 のように無限個の開円板になり, そのひとつひとつに f を制限すると, N の上への同相写像になっている.

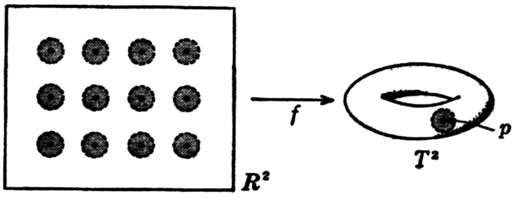
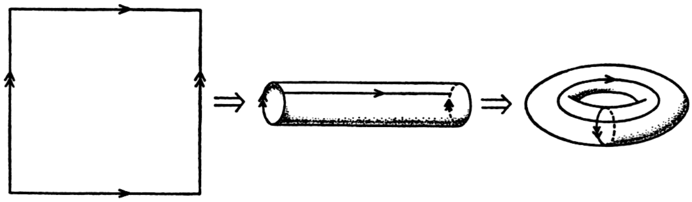


図 3.11

これから $f: \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow T^2$ が被覆写像であることがわかる.


図 3.12

$\boldsymbol{R}^2$ の中に正方形 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ をとると, f によって左辺 $\{0\} \times [0, 2\pi]$ と右辺 $\{2\pi\} \times [0, 2\pi]$ が同一視され, 上辺 $[0, 2\pi] \times \{2\pi\}$ と下辺 $[0, 2\pi] \times \{0\}$ が同一視される. よって トーラス T^2 は四辺形の対辺を図 3.12 の矢印に従って同一視したものと考えられる.

§3.4　射影平面

射影平面は球面やトーラスと並んで代表的な 2 次元多様体である. それは, 2 次元球面 S^2 上のすべての点について, その点と対蹠点 (球面の中心に関して正反対の位置にある点) を同一視して得られる空間である. まず, 1 次元球面 (円周 S^1) について, そのような同一視を考えてみよう.

図 3.13 がその説明である. 円周上に同じ記号の点が 2 つずつある. これらの 2 点がそれぞれ 1 点に同一視されるのである. S^1 を図のように変形して考えれば, 同一視の結果得られる空間は再び S^1 であることがわかる.

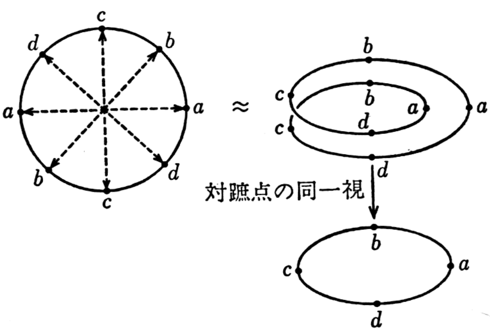


図 3.13

2 次元球面 S^2 の場合には事情は少し複雑になる. 得られる空間ももはや S^2 ではない. 図 3.13 のような同一視の様子がいっぺんにわかる図がもはや描けないので, S^2 をいくつかの部分に分解して, 部分的に考えることにしよう.

まず図 3.14 のように, 赤道に平行な 2 つの円周に沿って S^2 を 3 つの部分に分ける. この 2 つの円周は南北同じ緯度の緯線であって, それらは互いに対蹠的な位置にある. 切り離された 3 つの部分を A, B, C と名づける (図 3.14).

上ぶた A の点の対蹠点は下ぶた C の上にある．それらを同一視すれば A と C とはぴったり重なり，ひとつの円板 D になる．

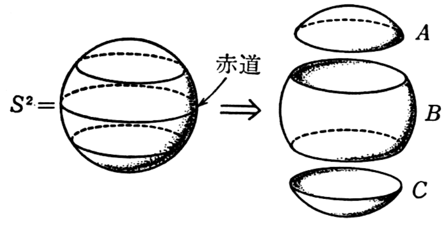


図 3.14

次に，真中の帯状の部分 B で対蹠点の同一視を行なう．B は図 3.15 の左上の円筒と位相同形である．この円筒上に同じ記号で示された2つの線分 ab は対蹠的な位置にあり，互いに同一視されるのであるが，ひとまずこの2つの線分に沿って円筒を切り離して2つの長方形 E, F とする．E 上の任意の点 p の対蹠点 p' は F の上にあり，それらの位置関係は図 3.15 に示された通りである．よって，図 3.15 右側の真中の図のように，上下を入れかえるように F を裏返して E の上に重ねれば，対蹠点同士はちょうど重なり合う．こうして，E と F の対蹠点を同一視すればひとつの長方形 G になることがわかる．

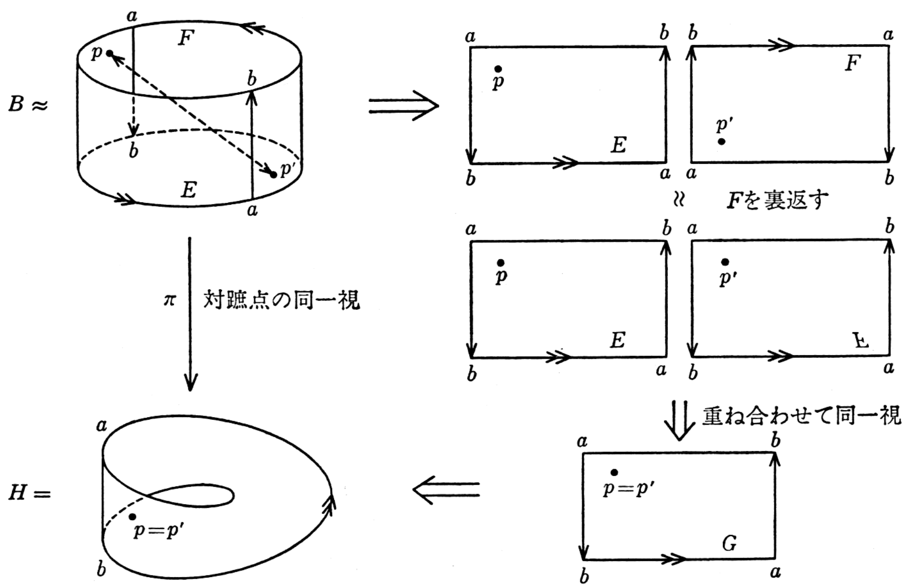


図 3.15

切り離しに使った線分 ab は G の上ではひと組の対辺になっている．これを図 3.15 右下の矢印に沿って同一視すると，有名なメビウスの帯 H になる．結局，円筒 B において対蹠点の同一視を行なってメビウスの帯 H が得られた．

$\pi: B \longrightarrow H$ を同一視の写像とすると，π によって B の2つの境界線は，H の境界線の円周に各々位相同形に写される．

2次元球面を A, B, C に切り離し，それぞれの部分で対蹠点の同一視を行なって，円板 D とメビウスの帯 H を得た．射影平面を得るにはこの切り離しをもとにもどせばよい．それは円板 D とメビウスの帯 H を，D と H の境界線（ともに円周！）に沿ってはり合わせることに相当している．しかし，残念ながらこのはり合わせは我々の3次元空間の中では実行でき

ない．射影平面は3次元空間に入らないことが証明されているからである．このはり合わせは‘頭の中で’のはり合わせである．

D と H の境界線を $\partial D, \partial H$ とそれぞれ書くことにしよう．両方とも円周であるから，同相写像 $f:\partial D \longrightarrow \partial H$ がある．和集合 $D \cup H$ において，各点 $p \in \partial D$ と $f(p) \in \partial H$ とを同じ点とみなして得られる‘抽象的’位相空間が射影平面なのである．

3次元から4次元へ思考の範囲を広げると，このはり合わせが可能になる．$\boldsymbol{R}^4$ の中で H と D とが‘実際に’はり合わされる様子を見るため，$\boldsymbol{R}^4$ の第4座標を‘時間’と解釈し，時間軸に沿って $\boldsymbol{R}^3$ がずらっと並んだものが $\boldsymbol{R}^4$ であると考えよう．

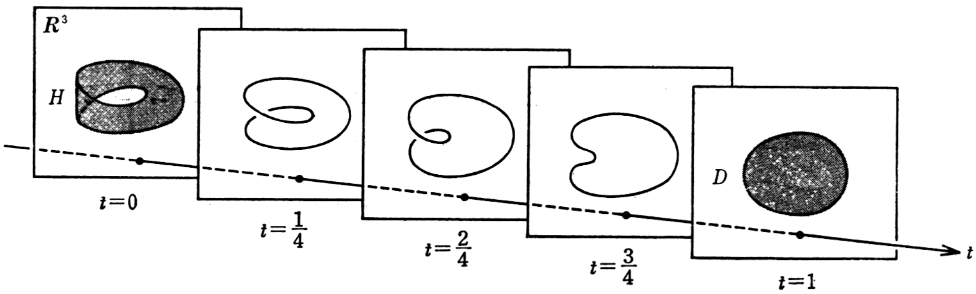


図 3.16

時刻 $t=0$ に対応する $\boldsymbol{R}^3$ の中にメビウスの帯 H をおく（図 3.16）．時刻が0から1まで変化する間に，メビウスの帯 H の境界線を $\boldsymbol{R}^3$ の中で少しずつ動かしていき，$t=1$ でちょうど円板 D の境界線に一致するようにする．メビウスの帯の内部（＝境界線でない部分）は $t=0$ の $\boldsymbol{R}^3$ に‘置き去り’にしてしまい，境界線の変化だけを考えるのである．こうすると $\boldsymbol{R}^4$ の中に3つの図形が得られる．すなわち $t=0$ の $\boldsymbol{R}^3$ の中にあるメビウスの帯 H，$0 \leqq t \leqq 1$ の間の境界線の変化の軌跡 J（それは円筒 $S^1 \times [0,1]$ に位相同形である），および $t=1$ に対応する $\boldsymbol{R}^3$ の中の円板 D の3つである．

円筒 J と円板 D を共通の境界線 ∂D に沿ってはり合わせたものは，再び円板に位相同形になるから，上で得られた3つの図形の和集合 $H \cup J \cup D$ は，メビウスの帯 H と円板 $J \cup D$ を共通の境界線 ∂H に沿ってはり合わせた図形になっている．

これで，$\boldsymbol{R}^4$ の中では，メビウスの帯と円板のはり合わせが‘実際に’遂行できることがわかった．射影平面は $\boldsymbol{R}^4$ の図形として実現できる．言いかえれば $\boldsymbol{R}^4$ に埋め込めるのである．

射影平面を記号で P^2 と書く．P は projective plane の頭文字である．

P^2 は S^2 の対蹠点を2つずつ同一視して得られた，同一視の写像 $S^2 \longrightarrow P^2$ は P^2 を2重に覆う被覆写像である．

射影平面は射影幾何とよばれる幾何学に関連して自然に現われる．射影幾何の厳密な説明をする余裕はないが，空間に点光源0をおき，図形とその影に共通な性質を研究する幾何学と思えばよい．射影幾何を整合的に展開するためには，どうしても無限遠点とか無限遠直線とかの概念を導入する必要が生ずる．たとえば，ある点 p の影を平面の壁 Π の上に落とそうとし

ても，光源0と p を結ぶ直線 l が Π に平行になってしまえば，p の影は Π の上にできない．この場合には p の影は無限に遠い点にあると考えなくてはならない．したがって，平面 Π に無限遠点を（しかもあらゆる方向にひとつずつ）つけ加えることが必要になる．それらは全体として無限遠直線になっている．さらにある方向の無限遠点と，正反対の方向の無限遠点とは同一視するのが自然である．

このような仕方で平面に無限遠直線をつけ加えたものが射影幾何の舞台になる‘平面’である．射影平面 P^2 はこのような‘平面’に位相同形なのである．

●ノート．射影平面と非ユークリッド幾何学

$\boldsymbol{R}^3$ の原点を中心とする球面 S^2 を考える．原点を通る平面とこの S^2 との交わりを**大円**とよぶ．赤道は大円のひとつだし，南極と北極を通る円周も大円である．要するにひと組の対蹠点を含む球面上の円周が大円である．

すぐわかるようにひとつの大円を C とすると，C 上のどの点についても，その点の対蹠点はまた C 上にある．したがって，球面 S^2 の対蹠点同士を同一視して射影平面 P^2 を作るとき，S^2 上の任意の大円は，対蹠点同士が同一視されて P^2 上の円周になる．

さて，P^2 を‘平面’とよぶことにし，大円から得られた P^2 上の円周を‘直線’とよぶことにすると，ここにひとつの‘平面’幾何学が構成される．これを**だ円的非ユークリッド幾何学**という．

図 3.17 のように，任意の（異なる）2 つの大円は対蹠点 A, B で交わる．P^2 上では，A と B は1点に同一視されるから，結局，我々の‘平面’上の相異なる2直線は必ず1点で交わるということになる．つまりこの平面幾何学には，平行線が存在し得ない．

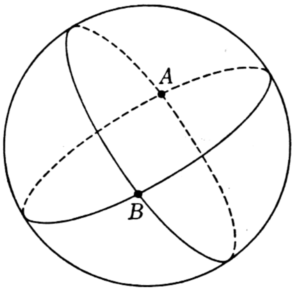


図 3.17

19 世紀にロバチェフスキー等により発見された非ユークリッド幾何では，これと反対に，1点を通り，与えられた直線に無数の平行線がひける．ロバチェフスキーの幾何学を射影平面上の非ユークリッド幾何学と区別して**双曲的非ユークリッド幾何学**という．

●談話室

ガウスとリーマン

おじさん　多様体っていうのはとても自然な数学的対象なんだけど，多様体が定義されてからまだ 100 年プラスアルファくらいしかたっていないんだよ．

ハナ子　ふーん．あ，おじさん，お茶がこぼれそう．

おじさん　あっどうもありがと….リーマンっていうエライ数学者が n 次元多様体っていうのを言いだしたのさ．まだ 20 代だった頃なんだ．

ハナ子　いまのおじさんより若かったのね．

おじさん　えーと，そうだね．ゲッチンゲン大学の講師になるのに就職講演っていうのをしなければならなかったんだけど，そのとき，'幾何学の基礎をなす仮説について' というのをやったんだ．そこで n 重に広がった空間のアイデアを述べたのさ．n 次元多様体だね．

ハナ子　それで講師になれたの．

おじさん　もちろんさ．だけど，講師といっても月給のもらえない講師だったらしい．

ハナ子　それじゃ大変ね．無事に生活できたのかしら．

おじさん　当時，無給の講師たちは，自分の講義を聴きに来た学生たちからお金を集めた，なんて話も聞いたことあるけど，たぶんそうなんだろうね．何にも食べなければリーマンだってお腹がへるだろう．

そのリーマンの講演を聞いたガウス先生がすごく感激したという話もあるよ．

ハナ子　よほど素晴らしい講演だったのね．

おじさん　それにガウスには自分の曲面論が真に乗り越えられたっていうような感激もあったのじゃないかしら．ガウスは以前に空間の中のまがった曲面の幾何学をずいぶん詳しく研究していてね．とくに曲面の第 1 基本形式っていうもので曲面の内在的な性質（たとえばガウス曲率など）が決まることを知っていたんだ．

ハナ子　第 1 基本形式って？

おじさん　えーと，まあ曲面上の点 p で 2 つの接ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を考えたとき，その内積 $|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|\cos\theta$ のことさ．それを各点で考えるようなものさ．それをリーマンは，n 次元多様体に第 1 基本形式を定めて，それで n 次元の幾何学をやろうと言ったわけだね．ガウスはあまり感心したのですっかりうわのそらになり，帰り道にドブに落っこちたんだってさ．

第4章

中間値の定理と最大値の定理

§4.1　中間値の定理

閉区間で定義された実数値の連続関数について，2つの有名な定理がある．中間値の定理と最大値の定理である．この章ではこの2つの定理について考えよう．ユークリッド空間にしても多様体にしても，それらの概念の根底には実数の集合 $\boldsymbol{R}$ があるのだから，'1次元の世界'の知識をまとめておくのは有用なことである．

まず，中間値の定理をとり上げる．

f を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とし，端点 a,b での値をそれぞれ α,β とする $(f(a)=\alpha,\ f(b)=\beta)$．中間値の定理では $\alpha\neq\beta$ と仮定する．その場合 $\alpha<\beta$ または $\alpha>\beta$ の2つの可能性があるが，$\alpha<\beta$ と仮定しても一般性は失われない．

【定理 4.1】（中間値の定理）γ を $\alpha<\gamma<\beta$ なる任意の実数とすると，f は $[a,b]$ 上で少くとも1回 γ という値をとる．すなわち $f(c)=\gamma$ となるような $c\in[a,b]$ が存在する．

xy 平面上に $y=f(x)$ のグラフを描いてみると，点 (a,α) と点 (b,β) を結ぶ連続曲線になる（図 4.1）．$\alpha<\gamma<\beta$ であるから，点 (a,α) と点 (b,β) とは直線 $y=\gamma$ をはさんで互いに反対側にある．このとき，f のグラフは必ず直線 $y=\gamma$ に交わらなければならない，というのが中間値の定理の主張である．

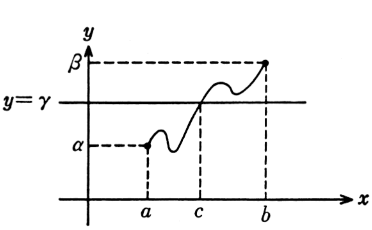


図 4.1　$y=f(x)$ のグラフ

これは直観的に明白に思われる．しかし直観的に明白に思われることと証明がやさしいこととは別問題である．確かに，$y=f(x)$ のグラフが線分や折れ線になる場合には，中間値の定理は本当にアタリマエである．その証明もやさしい．

たとえば，$y=f(x)$ のグラフが (a,α) と (b,β) を結ぶ線分になる場合を考えてみよう．その場合 $f(x)$ は次の1次式で与えられる．

$$f(x)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha$$

方程式 $f(x)=\gamma$ を解けば

$$x=\frac{b-a}{\beta-\alpha}(\gamma-\alpha)+a$$

したがって，この値を c とおけば $f(c)=\gamma$ であり，また容易に $a<c<b$ がわかる．

$y=f(x)$ のグラフが折れ線になる場合もやさしい．その場合，折れ線のどの頂点も $y=\gamma$ 上にないとすると，折れ線を構成する線分の中に両端が直線 $y=\gamma$ に関して互いに反対側にあるものが必ずあるから，その線分に上の議論を適用すればよい．

ところが，一般の連続関数はこのようにわかりやすいものばかりとは限らない．どんなにヘンテコな連続関数があるか知れたものではない．中間値の定理の証明は，もはやアタリマエではなくなって，'実数の連続性' とよばれる基本的性質が必要になる．この本では定理 4.1 の証明にまで立ち入らないが，興味ある読者は適当な解析学の教科書を参照してほしい．

中間値の定理の応用

平面 $\boldsymbol{R}^2$ にひとつの円を描く．簡単のため，原点0を中心とし半径1の円 S^1 を考える．S^1 によって $\boldsymbol{R}^2-S^1$ は2つの部分，円の '内側' と '外側' に分けられる．

$$\text{'内側'}=\{p\in\boldsymbol{R}^2\,|\,d(0,p)<1\},\qquad \text{'外側'}=\{p\in\boldsymbol{R}^2\,|\,d(0,p)>1\}$$

中間値の定理から次のことがわかる．

【命題 4.a】 p_0 を円の '内側' の1点，p_1 を '外側' の1点とする．p_0 と p_1 を結ぶ平面上の連続曲線は，必ず円 S^1 と交わる．

この場合でも，p_0 と p_1 を結ぶ曲線が線分や折れ線の場合には，命題 4.a はアタリマエであって，中間値の定理を持ち出すまでもない．中間値の定理が必要になるのは，どんな連続曲線についてもそれが成り立つということを証明するところである．

証明　§2.2 の定義によれば $\boldsymbol{R}^2$ 上の連続曲線とは，連続写像 $\varphi:[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}^2$ のことであった（§2.2，例7参照）．仮定より $\varphi(0)=p_0$，$\varphi(1)=p_1$ である．原点0と点 $\varphi(t)$ との距離 $d(0,\varphi(t))$ は，変数 $t\in[0,1]$ に関する連続関数になる．$t=0$ における値は $d(0,\varphi(0))=d(0,p_0)<1$．$t=1$ における値は $d(0,\varphi(1))=d(0,p_1)>1$．中間値の定理によって $d(0,\varphi(t_0))=1$ となる $t_0\in[0,1]$ が存在するはずである．この点 $\varphi(t_0)$ が曲線 φ と円周 S^1 の交点にほかならない．証明終り．

*　　　*　　　*

タロウとハナ子のためのお話

広い野原（平面 Π）がありました．その野原には円形の柵 S があって，柵の中には一頭の牝牛 p が飼われていました．図 4.2 を見て下さい．飼主のアルファルファ氏が立っています．牝牛が柵の外に出られないのをアルファルファ氏は知っています．（命題 4.a がその根拠です．）牝牛の動きは平面 Π の連続曲線で表わされますから，柵 S を破らずには外に出られません．柵は丈夫だ，とアルファルファ氏はすっかり安心しておりました．

ところがある朝，大事な牝牛がいないのに気がついてアルファルファ氏は驚きました．早速

柵を調べてみましたが，こわれた所はありません．

この平和な村には牛泥棒などいるわけはないのです．いったいどうしたことでしょう．牝牛が消えてしまったみたいではありませんか．

実はこういうことでした．

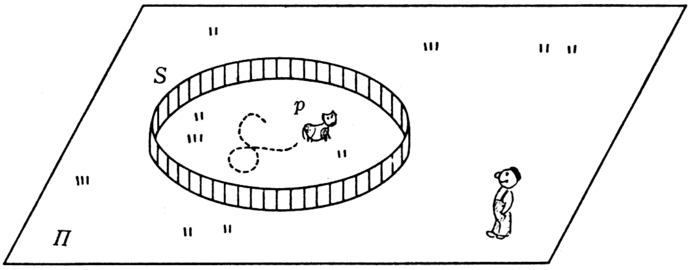


図 4.2

不思議なこともあるものです．牝牛に羽がはえたのです．丈夫な柵もなんのその，牝牛は自由に空中を飛んで星空のかなたに逃げてしまったのでした（図 4.3）．

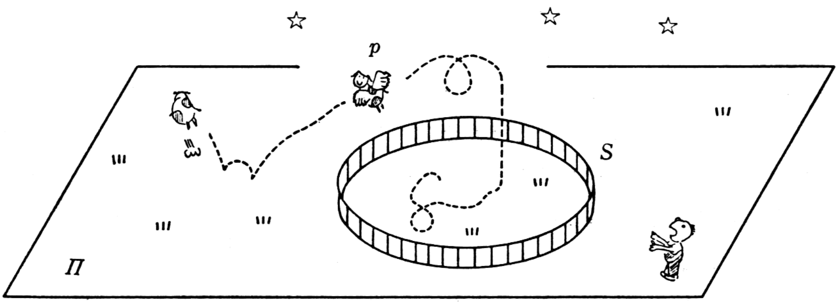


図 4.3

*　　*　　*

いろいろな次元のユークリッド空間の間には自然な包含関係 $\boldsymbol{R}^1 \subset \boldsymbol{R}^2 \subset \boldsymbol{R}^3 \subset \cdots$ がある．$n<m$ のとき，$\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{R}^m$ の $x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=x_m=0$ という部分集合と考えられる．$\boldsymbol{R}^n$ の図形は $\boldsymbol{R}^m$ の図形でもある．

平面 $\boldsymbol{R}^2$ に円周 S^1 があるとき，その‘内側’の点と‘外側’の点を円周に交わらない $\boldsymbol{R}^2$ の連続曲線で結ぶことはできない（命題 4.a）．ところが S^1 を $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合と考えると，$\boldsymbol{R}^3-S^1$ のどんな 2 点も S^1 に交わらない $\boldsymbol{R}^3$ の連続曲線で結ぶことができる．円周 S^1 は $\boldsymbol{R}^2$ を 2 つの部分に分けるが，$\boldsymbol{R}^3$ を分けることはない．羽のはえた牝牛は 3 次元空間の連続曲線に沿って運動できるので柵に触れずに逃げ出せたのである．

【定義】 図形 A が**弧状連結**とは，A の任意の 2 点が A 内の連続曲線で結べることである．

S^1 を平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の円周とすると，$\boldsymbol{R}^2-S^1$ は弧状連結ではないが，$\boldsymbol{R}^3-S^1$ は弧状連結である．

$\boldsymbol{R}^2-S^1$ は‘内部’と‘外部’に分かれる．そしてそれぞれは弧状連結になっている．一般に次の定義をする．

【定義】 図形 A が（有限個または無限個の）部分集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ に分かれていて（つまり $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$ であって）次の 2 条件が成り立つとする．

（i）$i \neq j$ なら A_i の点と A_j の点は A 内の連続曲線では結べない．

(ii)　各 A_i は弧状連結である．

そのとき，各々の A_i を A の**弧状連結成分**という．

【命題 4.b】 S^2 を $\boldsymbol{R}^3$ の原点を中心とし半径1の球面とする．$\boldsymbol{R}^3-S^2$ は2つの弧状連結成分に分かれる（S^2 の‘内側’と‘外側’）．

この命題も，原点からの距離を表わす連続関数に中間値の定理を適用して証明できる．

*　　*　　*

お話のつづき

前の事件にすっかりこりたアルファルファ氏は球形の牛小屋 S^2 をこしらえました．小屋はレンガで出来ていて，窓もなければ出口もありません．ここに牝牛をとじこめておけば，羽がはえても大丈夫です(図4.4)．(命題 4.b がその根拠です．)

ところがある朝，球形の牛小屋はまたまたからっぽになっていました．壁はどこも破れていません．アルファルファ氏は隣の名探偵ホームズ氏の家にとんで行きました．ホームズ氏の推理によると，牝牛は4次元の連続曲線に沿って逃げ出したのです．ホームズ氏は次のような連続曲線を $\boldsymbol{R}^4$ の中に描いてみせました．

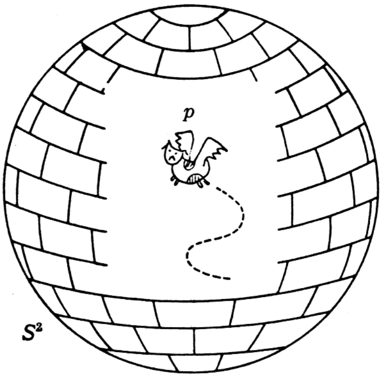


図 4.4

*　　*　　*

ホームズ氏の例

$\boldsymbol{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\boldsymbol{R}\}$ を $x_4=0$ で決まる $\boldsymbol{R}^4$ の部分集合 $\{(x_1,x_2,x_3,0)\mid x_i\in\boldsymbol{R}\}$ に同一視する．球形の牛小屋は $\boldsymbol{R}^3$ の中の図形 $S^2=\{(x_1,x_2,x_3)\mid {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=1\}$ であるが，これを $\boldsymbol{R}^4$ の図形 $\{(x_1,x_2,x_3,0)\mid {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=1\}$ と思いなおす．記号は同じ S^2 を使う．

連続曲線 $\varphi:[0,3]\longrightarrow\boldsymbol{R}^4$ を次のように定義しよう．

$$0\leqq t\leqq 1 \quad \text{のとき} \quad \varphi(t)=(0,0,0,t)\in\boldsymbol{R}^4$$
$$1\leqq t\leqq 2 \quad \text{のとき} \quad \varphi(t)=(t-1,t-1,t-1,1)\in\boldsymbol{R}^4$$
$$2\leqq t\leqq 3 \quad \text{のとき} \quad \varphi(t)=(1,1,1,3-t)\in\boldsymbol{R}^4$$

この3つの式は $t=1$, $t=2$ の所でそれぞれつながってひとつの（$\boldsymbol{R}^4$ の中の）連続曲線を定める．この曲線は S^2 に交わるだろうか．

S^2 の点の第4座標は0である．よって曲線と S^2 の交点 $\varphi(t_0)$ がもしあれば，その第4座標は0でなければならない．$\varphi(t)$ の定義式において第4座標が0になるのは，$t=0$ または $t=3$ のときに限る．ところが $\varphi(0)=(0,0,0,0)$, $\varphi(3)=(1,1,1,0)$ であるから，これらは S^2 の点ではない．したがって曲線は S^2

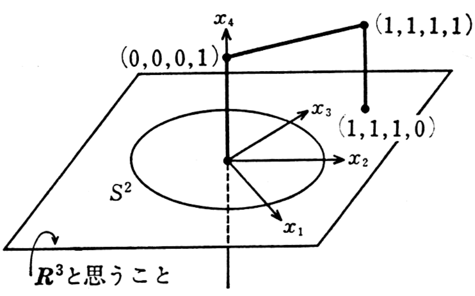


図 4.5　ホームズ氏の曲線

に交わらない.

しかも曲線の始点 $\varphi(0)$ は S^2 の中心であった. 終点 $\varphi(3)$ は, ($\boldsymbol{R}^3$ で考えれば) S^2 の'外側'の点 (1,1,1) になっている. つまり, $\boldsymbol{R}^4$ の中では, S^2 の'内側'と'外側'とが S^2 に交わらない連続曲線で結べるのである (図 4.5).

命題 4.a と 4.b は一般の次元にも拡張できる.

【命題 4.c】 $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} を $S^{n-1}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \boldsymbol{R}^n \mid x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2=1\}$ と定義する. $\boldsymbol{R}^n-S^{n-1}$ は2つの弧状連結成分 (S^{n-1} の'内側'と'外側') に分かれる. $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の中で考えると, $\boldsymbol{R}^{n+1}-S^{n-1}$ は弧状連結になってしまう.

問題 命題の前半を原点からの距離と中間値の定理を使って証明せよ. 後半を示すため, ホームズ氏にならって $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の曲線を描いてみよ.

●ノート. 同値関係と同値類別

集合の要素の間のいろいろな関係を考える. たとえば自然数の間には, 大小関係 $a\leqq b$, 整除関係 $a|b$ (b は a で割り切れる), 2を法とする合同関係 $a\equiv b$ (差 $a-b$ が2で割り切れる) などがある.

【定義】 集合 A の要素間のある関係 $a\sim b$ が次の3性質をもつとき, その関係 $\sim$ をひとつの**同値関係**という.

(1) $a\sim a$

(2) $a\sim b\Longrightarrow b\sim a$

(3) $a\sim b,\ b\sim c\Longrightarrow a\sim c$

たとえば, 自然数の間の合同関係'≡'は同値関係である. 大小関係'≦'は (1) $a\leqq a$, および (3) '$a\leqq b,\ b\leqq c\Longrightarrow a\leqq c$' を満たすが (2) '$a\leqq b\Longrightarrow b\leqq a$' を満たさないので同値関係ではない. 整除関係も同値関係ではない.

A を図形とする. A の2点 p,q が A 内の連続曲線で結べるとき, $p\sim q$ と書くことにすると, $p\sim q$ は A の要素 (点) の間の同値関係になる.

一般に, $\sim$ を集合 A の要素間のひとつの同値関係とするとき, 次の定理が証明できる.

【定理】 $A=\bigcup_i A_i$ のように, A を互いに交わらない (有限個または無限個の) 部分集合に分割し, 次の2条件が満たされるようにすることができる.

(i) $i\neq j$ なら A_i の要素と A_j の要素の間には関係 $\sim$ が成立しない.

(ii) どの A_i についても, A_i の任意の2つの要素 a,b について $a\sim b$ が成り立つ.

これを集合 A の (同値関係 $\sim$ による) **同値類別**という. 各々の A_i を**同値類**とよぶ.

《例 1》 '2を法とする合同関係 ≡' によって自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ を同値類別してみると, $\boldsymbol{N}=\{1,3,5,7,9,\cdots\}\cup\{2,4,6,8,10,\cdots\}$ となる. 奇数の同値類と偶数の同値類に分かれる.

《例 2》 A を任意の図形とする. '曲線で結べる' という関係 $\sim$ によって A を同値類別することは, A を弧状連結成分に分けることにほかならない. (関係 $\sim$ に関する同値類が弧状連結成分である.) 上の定理から, 任意の図形は (有限個または無限個の) 弧状連結成分に分

解できるということがわかる.

§4.2　最大値の定理とコンパクト性

最大値の定理は次のように述べられる.

【定理 4.2】（最大値の定理）　閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数 $f:[a,b] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は，閉区間 $[a,b]$ のどこかの点 c で最大値をとり，どこかの点 d で最小値をとる.

最大値というのは $y=f(x)$ のグラフの山が一番高くなる所，最小値というのは一番低くなる所である.

正確には次のように定義する．点 $c \in [a,b]$ での値 $f(c)$ が関数 f の**最大値**であるとは，任意の $x \in [a,b]$ について $f(x) \leqq f(c)$ となることである．最小値の定義も同様である.

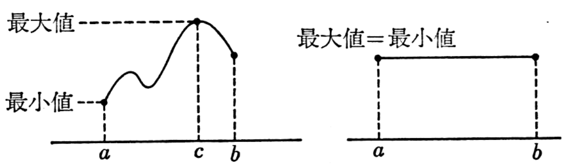


図 4.6

この定義に従えば，f が一定値の場合にはどの点の値も最大値かつ最小値と考えられる（図 4.6).

最大値の定理では，閉区間上の連続関数というのが大切なところで，閉区間でなければ最大値も最小値もない連続関数があり得る（図 4.7).

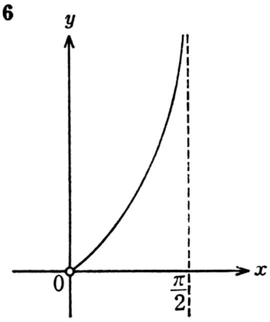


図 4.7　開区間 $(0,\pi/2)$ で関数 $y=\tan x$ のグラフを描いたもの．開区間 $(0,\pi/2)$ では最大値も最小値もない.

最大値の定理の応用例を示そう.

19 世紀の末，イタリアの数学者 G. ペアノ（G. Peano）は不思議な曲線を発見して当時の数学界を驚かせた．彼の発見した曲線は今日**ペアノ曲線**とよばれている．ペアノ曲線は，正方形 $[0,1]\times[0,1]$ をすきまなく埋めつくす連続曲線である．すなわち，連続な全射 $\varphi:[0,1] \longrightarrow [0,1]\times[0,1]$ である（図 4.8).

このショッキングな発見は，次元とか連続性についての素朴な観念に深刻な反省をうながし，今日のような位相幾何学が成立するひとつのきっかけになった.

正方形を I^2 とする：$I^2=[0,1]\times[0,1]$．ペアノ曲線は I^2 を埋めつくす連続曲線であっ

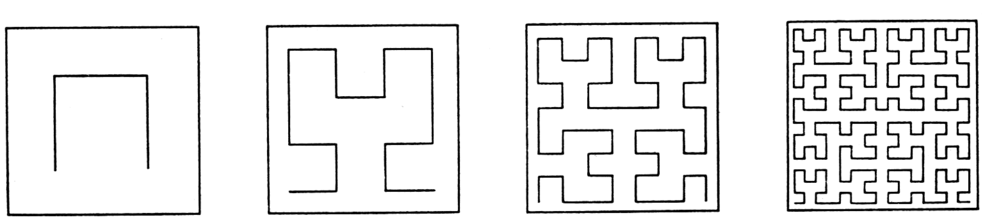


図 4.8　ペアノ曲線（ヒルベルトによる改良版）はこれらの曲線の‘極限’である．‘極限’においてはすきまが全然なくなってしまう.

たが，では，I^2 に1点 p_0 を定め，p_0 だけは通らずに p_0 以外の I^2 の点をすべて通過するような連続曲線は構成できるだろうか．すなわち連続な全射 $\varphi:[0,1]\longrightarrow(I^2-\{p_0\})$ は存在するだろうか．

答は否である．最大値の定理を使って，これを証明してみよう．連続な全射 $\varphi:[0,1]\longrightarrow(I^2-\{p_0\})$ があると仮定して矛盾を出せばよい．$t\in[0,1]$ に対応する点 $\varphi(t)$ は決して p_0 に一致しない．よって $\varphi(t)$ と p_0 との距離 $d(\varphi(t),p_0)$ は常にプラスである．したがってその逆数の関数 $1/d(\varphi(t),p_0)$ は t を変数とする $[0,1]$ 上の連続関数になる．

ところが，$\varphi(t)$ は $I^2-\{p_0\}$ のすべての点を通過するから，とくに，p_0 にいくらでも近い点を通過する．いいかえれば距離 $d(\varphi(t),p_0)$ はいくらでも0に近くなる．これは，その逆数の関数 $1/d(\varphi(t),p_0)$ がいくらでも大きい値をとることを意味するから，最大値の定理に矛盾してしまう．これで連続な全射 $\varphi:[0,1]\longrightarrow(I^2-\{p_0\})$ が存在しないことがわかった．

最大値の定理も‘実数の連続性’という性質に基づいて証明される．ここでそれを定式化しておこう．

実数の連続性　単調増加で，上に有界な数列は収束する．

数列の定義は改めて述べるまでもなかろう．数列 $\{a_i\}$ が**単調増加**とは $a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq\cdots\leqq a_i\leqq a_{i+1}\leqq\cdots$ となることである．また**上に有界**であるとは，十分大きな定数 M をとればすべての i について $a_i\leqq M$ が成り立つことである．数列 $\{a_i\}$ が単調増加でかつ上に有界ならば極限値 $\lim_{i\to\infty}a_i$ があるというのである．

‘実数の連続性’は実数に関するひとつの公理である．この公理には，論理的には同値であるが一見形の異なるいろいろな述べ方がある．上のような定式化は，それらのうちで比較的わかりやすいものと思われる．

最大値の定理の詳しい証明は解析学の教科書に譲って，ここでは証明のあらすじだけを述べておこう．

閉区間の次の性質が最大値の定理にとって本質的である．（この補助定理の証明に，実数の連続性の公理が使われるのである．）

【補助定理】　閉区間 $[a,b]$ の中の任意の数列 $\{a_i\}$ から，収束する部分列 $\{a_{i(n)}\}$ を選び出すことができる．その部分列 $\{a_{i(n)}\}$ の極限 c も，また閉区間 $[a,b]$ に属する．

数列 $\{a_i\}$ の**部分列**とは，$\{a_i\}$ の一部（と言っても無限個）を適当に抜き出して作った数列のことである．

《例 1》　数列 $0,1,2,0,1,2,0,1,2,\cdots$ は $0,1,2$ を繰り返す数列である．この数列は閉区間 $[0,2]$ の中の数列である．この数列自身は収束しないが，0からはじめて2つおきの部分列 $0,0,0,0,\cdots$ を選び出せば明らかに0に収束している．極限値0は $[0,2]$ に属す．

《例 2》　数列 $1,1/2,1/3,2/3,1/4,2/4,3/4,\cdots,1/n,2/n,\cdots,(n-1)/n,\cdots$ は閉区間 $[0,1]$ の中の数列である．この数列もそれ自身は収束しないが，次のような収束する部分列を含んでいる．

$$\text{部分列}\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \to 0$$

$$\text{部分列}\quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots \to 1$$

$$\text{部分列}\quad 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \cdots, \frac{n}{2n-1}, \cdots \to \frac{1}{2}, \qquad \text{etc.}$$

最大値の定理の略証　f を $[a,b]$ 上の連続関数とする．$[a,b]$ を i 等分する．$(i+1)$ 個の i 等分点の中で，f の値が一番大きくなるような i 等分点を a_i とする．数列 $\{a_i\}$ は閉区間 $[a,b]$ の中の数列であるから，補助定理によって収束する部分列 $\{a_{i(n)}\}$ が選び出せる．その極限を $c\in[a,b]$ とすれば，c において f は最大値をとるのである．

上の補助定理で述べられた閉区間の性質は，コンパクト性とよばれる図形の性質に一般化される．最大値の定理も閉区間からコンパクトな図形に拡張できる．これらのことを述べる前に，点列の収束，閉集合などについて説明しておこう．

点列は数列の一般化である．A を $\boldsymbol{R}^n$ の図形とする．A に属する点の無限列 $p_1, p_2, p_3, p_4, \cdots, p_i, \cdots$ を **A の中の点列**という．点列 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_i, \cdots$ が1点 p_0 に限りなく近づくとき，点列 $\{p_i\}$ は p_0 に**収束**するといい，p_0 を $\{p_i\}$ の**極限点**という．記号で $p_0=\lim_{i\to\infty} p_i$ と書く．

ε-δ 論法式の精密な定義を与えれば次のようになる．点列 $\{p_i\}$ が p_0 に（$\boldsymbol{R}^n$ の中で）**収束**するとは，どんな（小さな）$\varepsilon>0$ を与えても，それに応じて十分大きな番号 N を選べば，N から先の番号 i をもつ p_i について $d(p_i, p_0)<\varepsilon$ が成り立つこと．

A の中の点列 $\{p_i\}$ が（$\boldsymbol{R}^n$ の中で）収束しても，その極限点 p_0 は A に属することも属さないこともある．

【定義】　$\boldsymbol{R}^n$ の図形 A が次の性質（$*$）をもつとき，A を $\boldsymbol{R}^n$ の**閉集合**という：

（$*$）　A の中の任意の点列 $\{p_i\}$ について，もしそれが（$\boldsymbol{R}^n$ の中で）収束すれば，その極限点 p_0 も必ず A に属す．

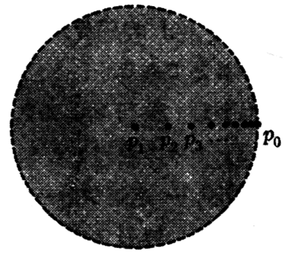
《例 3》　閉区間 $[a,b]$ は $\boldsymbol{R}$ の閉集合である．

数列 $\{a_i\}$ が $a\leqq a_i\leqq b$ を満たせば，その極限値 a_0 も $a\leqq a_0\leqq b$ を満たすからである．

《例 4》　開区間 (a,b) は $\boldsymbol{R}$ の閉集合ではない．

たとえば，数列 $1/2, 1/3, 1/4, \cdots, 1/n, \cdots$ は，開区間 $(0,1)$ の中の数列であるが，その極限0は $(0,1)$ に含まれていないから．

《例 5》　$\boldsymbol{R}^n$ の中の n 次元開円板 $O^n=\{p\in\boldsymbol{R}^n \mid d(p,0)<1\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合ではない（図 4.9）．



極限点 p_0 は O^n に含まれない

図 4.9

《例 6》　$\boldsymbol{R}^n$ 自身は $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である．

§2.4 で述べたように，$\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合でもあるから，開集合と閉集合は矛盾する概念ではない．

《例 7》　n 次元円板 $D^n=\{p\in\boldsymbol{R}^n \mid d(p,0)\leqq 1\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の閉

集合である.

一般に, $f: \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を連続関数とするとき, 任意の実数 a について, $f \leqq a$ で定義される部分集合 $\{p \in \boldsymbol{R}^n \mid f(p) \leqq a\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である. なぜなら, 点列 $\{p_i\}$ が p_0 に収束すれば関数値の数列 $\{f(p_i)\}$ は $f(p_0)$ に収束することが証明できて, これから, すべての i について $f(p_i) \leqq a$ が成り立てば極限点 p_0 においても $f(p_0) \leqq a$ が成り立つことがわかるからである.

n 次元円板 D^n が閉集合であることは, これの特別な場合である.

連続関数 $f: \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ について, $f = a$ で定義される部分集合 $\{p \in \boldsymbol{R}^n \mid f(p) = a\}$ も $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である. これから,

《例 8》 $(n-1)$ 次元球面 $S^{n-1} = \{p \in \boldsymbol{R}^n \mid d(p, 0) = 1\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である.

直積については次がいえる.

【命題 4.d】 A_1, A_2 がそれぞれ $\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n$ の閉集合なら, $A_1 \times A_2$ は $\boldsymbol{R}^{m+n}$ の閉集合である.

開集合の基本的性質 (§2.4 定理 2.2) と類似の性質が閉集合についても成り立つ. (共通部分 $\cap$ と和集合 $\cup$ の役割が, 開集合の場合と逆になっていることに注意.)

【定理 4.3】 (1) 空集合 ϕ と $\boldsymbol{R}^n$ 自身とは $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である.

(2) $A_1, A_2, \cdots$ (有限個または無限個) が $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合なら, 共通部分 $\bigcap_i A_i$ も $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である.

(3) $A_1, A_2, \cdots, A_k$ (有限個) が $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合なら, 和集合 $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ も $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である.

(3) だけ証明してみよう. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ の中の点列 $\{p_i\}$ が極限点 p_0 に収束していると仮定する. $A_1, A_2, \cdots, A_k$ のどれかひとつは無限個の $\{p_i\}$ の点を含むはずである. たとえば, A_1 がそれであるとする. A_1 に含まれる $\{p_i\}$ の点は部分点列 $\{p_{i(n)}\}$ をなしている. (部分点列の定義は明らかだろう.) $\{p_{i(n)}\}$ も同じ極限点 p_0 に収束する. ところが A_1 は仮定により $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合. よって p_0 は A_1 に含まれなくてはならない. これから, $p_0 \in A_1 \subset A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k$ がわかる. よって, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ は $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である.

実は, A が $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合であるための必要十分条件は, $\boldsymbol{R}^n - A$ が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合であることである. このことと開集合の基本性質から, 定理 4.3 を形式的に証明することもできる.

前に (§2.4), $\boldsymbol{R}^n$ の開集合は, $\boldsymbol{R}^n$ における境界点をひとつも含まない集合であると注意しておいた. $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合は反対に, $\boldsymbol{R}^n$ おける境界点をすべて含むような集合である. 'A が $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{R}^n - A$ が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合' という同値性が成り立つのはそのためである.

開集合の場合には, '$\boldsymbol{R}^n$ の開集合' ばかりでなく, '図形 A の開集合' を考えることができた. 閉集合の場合にも, '図形 A の閉集合' の概念が考えられる. ($X \subset A$ が A の閉集合とは, $A - X$ が A の開集合であること, と定義すればよい.) しかし, これらのことにはこれ以上立ち入らないことにする.

閉集合の説明が長くなったが, コンパクト性の定義に移ろう.

【定義】 図形 A が**コンパクト** (compact) であるとは，A の中の任意の点列 $\{p_i\}$ から，A の点に収束する部分点列 $\{p_{i(n)}\}$ が選び出せることである．

この性質は，補助定理で述べられた閉区間の性質の一般化になっている．したがって閉区間はもちろんコンパクトである．

容易に証明されることであるが，点列の収束性は連続写像によって保たれる．つまり，$f: A \longrightarrow B$ が連続写像であり，A の中の点列 $\{p_i\}$ が点 $p_0 \in A$ に収束すれば，B の中の点列 $\{f(p_i)\}$ は点 $f(p_0) \in B$ に収束する．これからコンパクト性が位相不変であることが証明される．

【命題 4.e】 (コンパクト性の位相不変性) $A \approx B$ のとき，A がコンパクトなら B もコンパクトである．

$\boldsymbol{R}^n$ の図形 A が $\boldsymbol{R}^n$ の中でどこまでも拡がってはいないとき，つまり十分大きな半径の n 次元円板を考えれば，その中にすっかり含まれてしまうとき，A は**有界**な図形であるという．

A がコンパクトならそれは有界である．なぜなら有界でなければ，A の中に $d(p_i, 0) > i$ を満たす点列 $\{p_i\}$ がとれるが，$\{p_i\}$ からは収束する部分点列が選び出せないからである．

また A がコンパクトなら，A は $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である．もしそうでなければ，A の中の点列 $\{p_i\}$ であって，その極限点 p_0 が A に含まれないものがとれる．この $\{p_i\}$ からは A の点に収束する部分点列が選び出せないからである．

$\boldsymbol{R}^n$ の図形 A がコンパクトなら，有界な閉集合であることがわかった．実は，この逆も成り立つ:

【定理 4.4】 $\boldsymbol{R}^n$ の図形 A は有界な閉集合のとき，またそのときに限ってコンパクトである．

これから，コンパクトな図形の具体例がわかる．

《例 9》 任意の次元の円板: $D^1, D^2, D^3, \cdots, D^n, \cdots$ はすべてコンパクトである．(有界なことは明らかである．閉集合であることは例7を見よ．)

《例 10》 任意の次元の球面: $S^0, S^1, S^2, \cdots, S^{n-1}, \cdots$ はすべてコンパクトである (例8参照)．

《例 11》 直積 $S^1 \times S^1$ (トーラス)，$S^2 \times S^2$, $S^2 \times D^2$, etc. … はすべてコンパクトである (命題 4.d 参照)．

《例 12》 一般に，X, Y がコンパクトな図形なら，直積 $X \times Y$ もコンパクトな図形になる (命題 4.d 参照)．

最大値の定理は次のようにコンパクトな図形に拡張される．コンパクト性は閉区間の一性質 (しかも最大値の定理にとって本質的な一性質) を一般化したものであるから，それは当然といえば当然であろう．

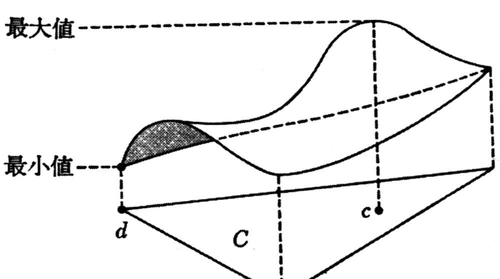


図 4.10　直積 $C \times \boldsymbol{R}$ の中の f のグラフ

【定理 4.5】 C をコンパクトな図形とする．C 上の任意の連続関数 $f: C \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は，C のどこかの点 c で最大値をとり，どこかの点 d で最小値をとる (図 4.10)．

第5章

組み合わせの思想

§5.1 コーヒーでも飲みながら…オイラーの定理

ある日曜日.

おじさん はい，お砂糖.

ハナ子 私，入れないことにしているの.

おじさん へえ，にがくない？ よく飲めるなあ.

ハナ子 だって，このまえ歯医者さんの待合室で雑誌を見てたらね，砂糖と虫歯ってすごい相関関係があるんだって. 戦争で砂糖の生産量がぐーんと落ちると，何年か経つと虫歯もぐーんと減ってるんだって.

おじさん ふうん，だけど虫歯が減るかわりに胃が荒れちゃったなんて人が増えないのかなあ. えーと，ところで，このまえの羽のはえた牛の話はどう？

ハナ子 なんだか変な話だと思ったけど.

おじさん そお，ところであの話でね，牛が円形の柵から出ないわけがちょっと書いてあったろう？ 平面に円があるとき，内部と外部の点は，その円に交わらない平面上の曲線では結べないっていうの. これは中間値の定理で証明できたんだけど.

ハナ子 ええ，そうだったと思うわ. だけど中間値の定理なんていうより，牛が柵から出ないってことの方があたりまえみたいな気がするわ.

おじさん まあそうだね. 僕もそう思うよ. でも，そこの所は一応目をつぶってもらって…. そこでね，証明が難しくなるのは一般の連続曲線を考える場合で，折れ線なんかを考えているだけならすごくやさしいんだって注意してあったろう.

ハナ子 ええ，中間値の定理の所でも線分や折れ線だけならアタリマエだって.

おじさん そうだったね. 折れ線は一般の連続曲線に比べると格段に扱いやすい性質をもっているんだ. 折れ線はいくつかの線分が集まった図形だけど，一般的なとらえどころのない図形より，線分というよくわかったものの集まりの方が扱いやすいというのは自然なことだろう？

ハナ子 そうね.

おじさん 線分なんてのは1次元の例だけど，こういう考え方は何次元になっても同じさ. た

とえば2次元なら，一般のよくわからない図形より3角形の集まりを考える方がわかりやすいし，3次元なら4面体の集まりを考えるのがわかりやすいというわけだね．もちろん，線分，3角形，4面体なんかが同時に寄り集まったものも考えるけれど，これにしたってぐしゃぐしゃした一般の図形より扱いやすいのは事実なんだ．

ハナ子　なるほど，そうかも知れないわ．

おじさん　だけどあまり無秩序に集まっちゃうと困るから，その集まり方にもいくつかの制限を設けるのが普通だけど．たとえば4面体同士がお互いに突き刺さったりはしていないとかね．2つの4面体が交わるときは，頂点か辺か，または面（3角形）のどれかを共有しつつ，そこでキチンと交わっててほしい，などという制限をつけるのさ．1次元の場合の折れ線にしても，線分と線分とは共通の頂点（つまり端点）で交わるだろう．

ハナ子　そうね．

おじさん　3角形と3角形が交わるときも，頂点同士で交わるか，一辺を共有して，その共通の辺で交わるかであってほしいわけ．

ハナ子　3角形と線分が交わるときはどうなるの？

おじさん　そのときは，線分がひとつの端点で3角形の頂点にくっついている場合と，線分が3角形の一辺にぴったり一致している場合の，どちらかの交わり方しか認めないことにするんだ．とにかく，こういうふうに集まり方に制限をつけるのさ．そして，この制限に反しないように，うまい具合に線分，3角形，4面体，etc. が集まった集合を**複体**というんだ．それから，そういうふうにして出来る図形を**多面体**というんだ．

ハナ子　なんだかよくわからなくなっちゃった．複体とか多面体とかいうのがよくわからないわ．

おじさん　この本のあとの所でその定義が出てくると思うけど，要するに，あるうまい条件を満たす線分，3角形や4面体の集まりを複体といって，そうして出来る図形が多面体というわけさ．

ハナ子　やっぱりよくわからないけど，複体と多面体はどこが違うの？

おじさん　複体というのは線分や3角形の集合．わかる？　だから，‘複体’という集合の要素は<u>3角形</u>とか<u>線分</u>．いい？　ところが，多面体はそれらが集まってできる<u>図形</u>なの．だから‘多面体’という集合の要素は<u>点</u>．わかる？　たとえば図 5.1 を見てごらん．ここにひとつの折れ線が描いてあるね．

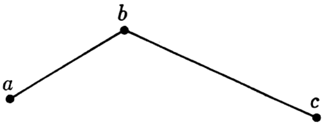


図 5.1

ハナ子　ええ．

おじさん　この折れ線という<u>図形</u>が**多面体**なんだ．（折れ線みたいに細いものを多面体なんてよぶのは少し変かも知れないけど．）ところが，ここに3つの頂点 a, b, c と2つの線分 ab, bc が集まっていると考えて，$\{a, b, c, ab, bc\}$ という‘5つの要素からなる集合’を考えたもの，それが**複体**というわけさ．だから，複体に含まれる頂点，線分，3角形，etc. を図形（つまりユークリッド空間の部分集合）と思って，それらの和集合をとったのが多面体という図形なんだ．

ハナ子　わかったような気がしてきたわ．‘多面体’はひとつの図形で，それを頂点，線分，3角形なんかに頭の中で分解したのが‘複体’っていう感じなのね．

おじさん　そう，そう．そう言った方が良かったかな．

ハナ子　それではもうひとつ質問．ええと，3角形とか線分とかは確かに考えやすそうだけど，正方形とか立方体なんかじゃいけないの？　立方体ってこの角砂糖みたいなものでしょ．これだってずいぶん考えやすそうだわ．

おじさん　もちろんそうさ．正方形や立方体の集まりも考えやすい図形さ．それをもとにして理論を作っても作れないことはないと思うよ．だけど正方形は対角線を引けば2つの3角形に分けられるだろう．それから，立方体にしてもいくつかの（たとえば5つの）4面体に分けられるから，3角形や4面体をもとにした理論さえ作っておけばそれで十分まにあうって事情もあるわけ．

ハナ子　あ，なるほど．

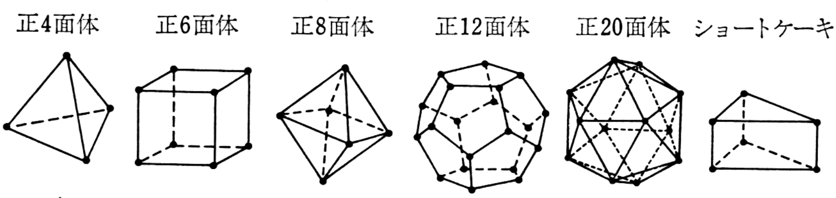
おじさん　線分や3角形の集まった図形を考える理由のひとつは，いままで言ってきたように，取り扱いやすいことなんだけど，もうひとつ理由があるんだよ．ハナ子ちゃんはオイラーの多面体定理っていうの聞いたことある？

ハナ子　知ってる知ってる．私，それ得意なの．

おじさん　へえ，得意なの？

ハナ子　ええ，中学校のころ数学の先生から聞いたんだけど．ええと，たとえばこの角砂糖の表面を考えると，頂点は 1, 2, 3, … 全部で8つあって，辺の数は 1, 2, 3, … 全部で 12．それからサイコロなんだから面の数は6つ．そして（頂点の数）−（辺の数）+（面の数）というのを計算すると，$8-12+6=2$ となるというんでしょ．この2という数は立方体でなくっても，4面体や8面体の表面でもみんな2になっちゃうのよね．それ聞いたときすごく感心しちゃった．

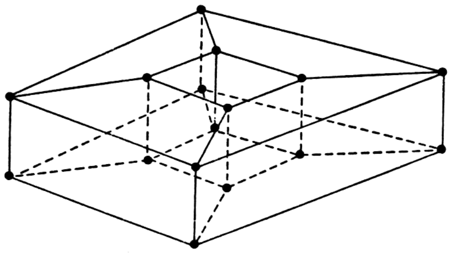
おじさん　そうそう．良く知ってるね．念のために有名な正多面体で確かめてみよう（図 5.2）．実は別に‘正’多面体でなくとも，少々ゆがんでいたっていいし，3角形や4角形が混じっているショートケーキみたいな形でもいいんだ（同じく図 5.2）．とにかく2次元球面 S^2 と位相同形なら，$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$ はみんな2になっちゃうんだ．ついでに，図 5.3 みたいな図形を考



	正4面体	正6面体	正8面体	正12面体	正20面体	ショートケーキ
頂点の数 α_0	4	8	6	20	12	6
辺の数 α_1	6	12	12	30	30	9
面の数 α_2	4	6	8	12	20	5
$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$	2	2	2	2	2	2

図 5.2

えてみると，こんどはトーラスに位相同形になるんだけど，その場合は $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$ は0になるよ．確かめてごらん．



$\alpha_0=16,\ \alpha_1=32,\ \alpha_2=16$

図 5.3

ハナ子　(図 5.3 を見て) ほんとにそうね．

おじさん　ここに出てきた $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$ という数は**オイラー標数**っていって，普通ギリシア文字の χ（カイ）を使って表わしているんだ．球面に位相同形な図形を3角形や4角形に分割して，この数を計算してみるとみんな2になっちゃったろう．これは本当は証明を必要とすることなんだけど，とにかくそうなるんだ．すると，このオイラー標数 $\chi=2$ というのは，3角形や4角形への分割に無関係な‘球面の性質’と考えられるだろう．

ハナ子　ええ，そんな気がするわ．

おじさん　同じように $\chi=0$ というのも‘トーラスの位相的性質’なわけだ．トーラスをどんなふうに分割しても $\chi=0$ になる．実は，このオイラー標数っていうのは，図形の位相不変量になるわけ．

ハナ子　少しわかりにくいけど，でもそうみたいね．

おじさん　だから多面体を複体に分割すると，ただ単に多面体を眺めているだけでは得られない，たとえばオイラー標数っていうような不変量が定義できるわけ．これがとても有効な方法なんだ．

ハナ子　それが線分や3角形への分解を考える第2の理由なのね．

§5.2　点，線分，3角形

点，線分，3角形，etc. が複体や多面体を構成する基礎になる．これらの‘ベクトルによる表示法’について説明しよう．後で（§5.3）高次元に拡張する．

議論はすべて $\boldsymbol{R}^n$（n: 十分大）の中で行なう．

点

$\boldsymbol{R}^n$ の任意の点 p_0 は $p_0=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と座標で書ける．これは $\boldsymbol{R}^n$ の定義だから問題ない．

線分

$p_0=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $p_1=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を $\boldsymbol{R}^n$ の異なる2点とする．線分 p_0p_1 を記号で $|p_0p_1|$ と書く．前に §2.1 で，

$$|p_0p_1|=\{((1-t)x_1+ty_1, (1-t)x_2+ty_2, \cdots, (1-t)x_n+ty_n)\,|\,0\leqq t\leqq 1\}$$

と定義された．ここに，点 $p_t=((1-t)x_1+ty_1,\cdots,(1-t)x_n+ty_n)$ は，$|p_0p_1|$ を $t:(1-t)$ の比に内分する点であった（図 5.4）．t が 0 から 1 まで変化すると，p_t は p_0 から p_1 まで等速度で動く．その軌跡が**線分**である．さらに $-\infty<t<\infty$ に渡って t を変化させると，点 p_t は**直線** p_0p_1 上を一定の速度で進んでいく．

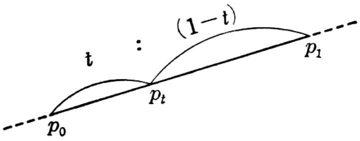


図 5.4

点 p_t の座標 $((1-t)x_1+ty_1,(1-t)x_2+ty_2,\cdots,(1-t)x_n+ty_n)$ は複雑なので $(1-t)p_0+tp_1$ と略記しよう．これはベクトルの演算記号の応用である．

ベクトル

n 個の実数 $a_1,\cdots,a_n$ を並べたもの $(a_1,\cdots,a_n)$ を **n 次元数ベクトル**とよぶ．記号で，$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ と書く．第 i 番目の数 a_i を $\boldsymbol{a}$ の**第 i 成分**という．λ を実数とし $\boldsymbol{a}$ を **λ 倍する**というのは，各成分を λ 倍することである：

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n)$$

また，$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)$ を**加える**とは，成分ごとに加えることである：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)$$

3 つ以上も同様で $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(a_1+b_1+c_1,\cdots\cdots,a_n+b_n+c_n)$, etc. 引き算も同様に定義できて，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n)$ となる．

$\boldsymbol{R}^n$ の点 $p_0=(x_1,\cdots,x_n)$，$p_1=(y_1,\cdots,y_n)$ をベクトルとみなして，$(1-t)p_0+tp_1$ を計算すると，$(1-t)p_0+tp_1=((1-t)x_1+ty_1,\cdots,(1-t)x_n+ty_n)$ となることがわかる．これで上の $(1-t)p_0+tp_1$ という記号法が正当化された．

以下，点 $p_0,p_1,\cdots,p_n$ に実数の係数をつけて加えた式 $\lambda_0p_0+\lambda_1p_1+\cdots+\lambda_np_n$ が出てくるが，すべてベクトルとして計算する意味である．

この記号法で線分，直線をもう一度書くと，

$$|p_0p_1|=\{(1-t)p_0+tp_1\,|\,0\leqq t\leqq 1\},\qquad \text{直線 } p_0p_1=\{(1-t)p_0+tp_1\,|\,-\infty<t<\infty\}$$

となる．あとの都合で，$\lambda_0=(1-t)$，$\lambda_1=t$ とおく．すると，$\lambda_0+\lambda_1=(1-t)+t=1$．よって

$$|p_0p_1|=\{\lambda_0p_0+\lambda_1p_1\,|\,\lambda_0+\lambda_1=1,\ \lambda_0\geqq 0,\ \lambda_1\geqq 0\}$$
$$\text{直線 } p_0p_1=\{\lambda_0p_0+\lambda_1p_1\,|\,\lambda_0+\lambda_1=1\}$$

これが我々の求める，ベルクル記号による線分と直線の表示法である．

線分 $|p_0p_1|$ 上の点 $\lambda_0p_0+\lambda_1p_1$ は $|p_0p_1|$ を $\lambda_1:\lambda_0$ の比に内分する点である．

《例》 $\boldsymbol{R}^4$ において $p_0=(1,2,3,4)$，$p_1=(5,6,7,8)$ とし，線分 $|p_0p_1|$ を $3:1$ の比に内分する点を求めてみよう．$3:1=\dfrac{3}{4}:\dfrac{1}{4}$ そして $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=1$ である．よって求める点 p は

$$p=\frac{1}{4}p_0+\frac{3}{4}p_1=\frac{1}{4}(1,2,3,4)+\frac{3}{4}(5,6,7,8)=(4,5,6,7)$$

3角形

$\boldsymbol{R}^n$ に3点 p_0, p_1, p_2 が与えられたとする．この点を頂点とする3角形 $p_0p_1p_2$ のベクトルによる表示を考えたい．そのためには，p_0, p_1, p_2 が一直線上にあっては困る．次の定義をしよう．

【定義】 p_0, p_1, p_2 が一直線上にないとき，この3点は**一般の位置にある**という．

3点が一般の位置にあるための条件は何だろうか．まず，反対に3点 p_0, p_1, p_2 が一直線上にあるための条件を求めておこう．

p_0, p_1, p_2 が一直線上にある

$\Longleftrightarrow$（i）$p_0 = p_1$　または　（ii）p_2 が直線 p_0p_1 上にある

$\Longleftrightarrow$（i）$p_0 = p_1$　または　（ii）$p_2 = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1$　$(\lambda_0 + \lambda_1 = 1)$

さらに条件を変形して

$\Longleftrightarrow$ '全部が 0' にはならない実数 μ_0, μ_1, μ_2 があって，

$\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = \boldsymbol{0}$，$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 0$ が成り立つ．

ここに $\boldsymbol{0} = (0, 0, \cdots, 0)$．$\boldsymbol{0}$ を**零ベクトル**という．

最後の $\Longleftrightarrow$ の証明　まず '$\Longrightarrow$' を示す．（i）の場合，$p_0 = p_1$ なら $p_0 - p_1 + 0 \cdot p_2 = \boldsymbol{0}$．よって $\mu_0 = 1$，$\mu_1 = -1$，$\mu_2 = 0$ とおけばよい．（ii）の場合，$p_2 = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1$ $(\lambda_0 + \lambda_1 = 1)$ なら移項して $\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 - p_2 = \boldsymbol{0}$．よって $\mu_0 = \lambda_0$，$\mu_1 = \lambda_1$，$\mu_2 = -1$ とおけばよい．$\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ から $\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 0$ がわかる．

次に '$\Longleftarrow$' を示す．$\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = \boldsymbol{0}$，$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 0$ を仮定する．μ_0, μ_1, μ_2 の '全部は 0' でない．もし $\mu_2 \neq 0$ なら，$\lambda_0 = -\mu_0/\mu_2$，$\lambda_1 = -\mu_1/\mu_2$ とおき，$\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = \boldsymbol{0}$，$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 0$ を μ_2 で割って移項すれば，$p_2 = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1$，$\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ を得る．これは（ii）の場合である．もし $\mu_2 = 0$ なら $\mu_0 = -\mu_1 \neq 0$．よって全体を μ_0 で割って移項して $p_0 = p_1$．これは（i）の場合である．

これで同値性がわかった．上で得られた条件の否定が，一般の位置にあるための条件である．これが次の命題である．

【命題 5.a】 3点 p_0, p_1, p_2 が一般の位置にあるための必要十分条件は次の（*）が成り立つことである．

（*）　$\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = \boldsymbol{0}$，$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 0$ になるのは，$\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$ の場合に限る．

《**例**》 $\boldsymbol{R}^4$ の3点 $p_0 = (1, 1, 1, 1)$，$p_1 = (1, 2, 3, 4)$，$p_2 = (1, 2, 4, 8)$ は一般の位置にある．

条件（*）を確かめてみよう．ある実数 μ_0, μ_1, μ_2 について，$\mu_0 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = \boldsymbol{0}$，$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 0$ が成り立つとする．成分ごとに計算して，$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 0$，$\mu_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 = 0$，$\mu_0 + 3\mu_1 + 4\mu_2 = 0$，$\mu_0 + 4\mu_1 + 8\mu_2 = 0$ が得られる．これらを満たす μ_0, μ_1, μ_2 は 0 しかない．よって命題 5.a により，3点 p_0, p_1, p_2 は一般の位置にある．

3点 p_0, p_1, p_2 が一般の位置にあるとして, 3角形 $p_0p_1p_2$ (以後, 記号で $|p_0p_1p_2|$ と書く) を考える. $|p_0p_1p_2|$ は動点 p' が線分 $|p_0p_1|$ 上を動くときの, 線分 $|p'p_2|$ の描きだす軌跡と考えられる (図 5.5). 点 p' は $|p_0p_1|$ 上にあるから $p' = \eta_0 p_0 + \eta_1 p_1$ ($\eta_0 + \eta_1 = 1$, $\eta_0 \geqq 0$, $\eta_1 \geqq 0$) と書ける. また線分 $|p'p_2|$ 上の点 p は $p = (1-t)p' + tp_2$ ($0 \leqq t \leqq 1$) と書ける. この2式から $p = (1-t)(\eta_0 p_0 + \eta_1 p_1) + tp_2$. このような点全体が**3角形** $|p_0p_1p_2|$ である. ここに現われた p_0, p_1, p_2 の係数を $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ とおく ($\lambda_0 = (1-t)\eta_0$, $\lambda_1 = (1-t)\eta_1$, $\lambda_2 = t$). すると

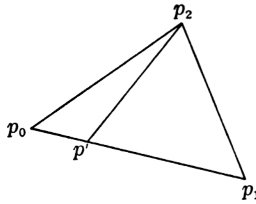


図 5.5

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = (1-t)(\eta_0 + \eta_1) + t = (1-t) + t = 1$$

また $\eta_0 \geqq 0$, $\eta_1 \geqq 0$, $0 \leqq t \leqq 1$ から $\lambda_0 \geqq 0$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$ を得る. 逆に $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_0 \geqq 0$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$ を満たす $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ を与えると, 点 $p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ は3角形 $|p_0p_1p_2|$ の点になる. ($\lambda_2 \neq 1$ なら, η_0, η_1, t が一意に解ける. $\lambda_2 = 1$, $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ なら $p = p_2$ である.) こうして次のような3角形の表示が得られた.

$$|p_0p_1p_2| = \{\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \mid \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_0 \geqq 0,\ \lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0\}$$

点 $p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ の $|p_0p_1p_2|$ における位置は図 5.6 のようになっている.

とくに, $p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ について,

$$p \in |p_0p_1| \Longleftrightarrow \lambda_2 = 0 \qquad (\lambda_0 + \lambda_1 = 1,\ \lambda_0 \geqq 0,\ \lambda_1 \geqq 0)$$

$$p \in |p_0p_2| \Longleftrightarrow \lambda_1 = 0 \qquad (\lambda_0 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_0 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0)$$

$$p \in |p_1p_2| \Longleftrightarrow \lambda_0 = 0 \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0)$$

$p = \dfrac{1}{3}p_0 + \dfrac{1}{3}p_1 + \dfrac{1}{3}p_2$ は $|p_0p_1p_2|$ の重心である.

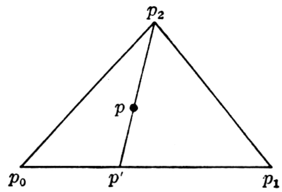


図 5.6 この図は $p \neq p_2$ の場合.
$\overline{p'p} : \overline{pp_2} = \lambda_2 : (\lambda_0 + \lambda_1)$
$p' = \dfrac{1}{\lambda_0 + \lambda_1}(\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1)$
($p \neq p_0, p_1$ のそれぞれに対応して同様の図が描ける)

上の3角形の表示から $\lambda_0 \geqq 0$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$ という制限を除くと, 3点 $p_0p_1p_2$ を通る**平面**の表示が得られる.

$$\text{平面 } p_0p_1p_2 = \{\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \mid \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

平面 $p_0p_1p_2$ 上の点は $p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ ($\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) と書ける. ここで平面上の点 p と実数3つの組 $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ とが1対1に対応することを示そう. 実際

$$p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \lambda_0' p_0 + \lambda_1' p_1 + \lambda_2' p_2 \qquad (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_0' + \lambda_1' + \lambda_2' = 1)$$

なら, 移項して $(\lambda_0 - \lambda_0')p_0 + (\lambda_1 - \lambda_1')p_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')p_2 = \mathbf{0}$, また $(\lambda_0 - \lambda_0') + (\lambda_1 - \lambda_1') + (\lambda_2 - \lambda_2') = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_0' + \lambda_1' + \lambda_2') = 1 - 1 = 0$. そして p_0, p_1, p_2 は一般の位置にあるから命題 5.a により $(\lambda_0 - \lambda_0') = (\lambda_1 - \lambda_1') = (\lambda_2 - \lambda_2') = 0$. すなわち, $\lambda_0 = \lambda_0'$, $\lambda_1 = \lambda_1'$, $\lambda_2 = \lambda_2'$ がわかった.

3つの実数 $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ は p について一意的に決まるから, 平面 $p_0p_1p_2$ の上の座標と考えられ

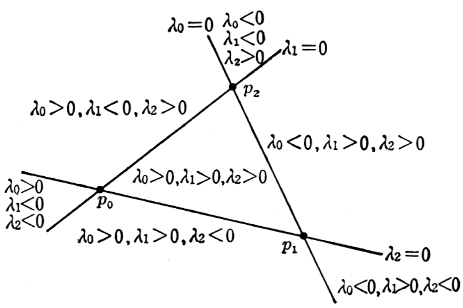


図 5.7

る．これを**重心座標**とよぶ．3点 p_0, p_1, p_2 に，それぞれ質量 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ の質点をおいたときの重心の位置が $p=\lambda_0 p_0+\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2$ で与えられるのである．

点 $p=\lambda_0 p_0+\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2$ の平面 $p_0p_1p_2$ 上の位置による λ_i の正負は前ページの図 5.7 の通り．

§5.3　4面体と単体

前節の議論を続行しよう．こんどは $\boldsymbol{R}^n$ に4点 p_0, p_1, p_2, p_3 をとり，この4点を頂点とする4面体を考える．4点が同一平面上にあると4面体ができないので困る．

【定義】 p_0, p_1, p_2, p_3 が同一平面上にないとき，この4点は**一般の位置にある**という．

このための条件は，p_0, p_1, p_2 が一直線上になく，かつ p_3 は平面 $p_0p_1p_2$ 上にない，ということである．命題 5.a と，前節で得られた平面 $p_0p_1p_2$ の表示式を使い，前と同じく形式的な，条件の同値変形をすることにより次の命題が得られる．

【命題 5.b】 4点 p_0, p_1, p_2, p_3 が一般の位置にあるための必要十分条件は次の条件（＊）である．

（＊）　実数 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ について，$\sum_{i=0}^{3}\mu_i p_i=\boldsymbol{0}$，$\sum_{i=0}^{3}\mu_i=0$ が成り立つのは，$\mu_0=\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$ の場合に限る．

点 p_0, p_1, p_2, p_3 が一般の位置にあるものとし，4面体 $p_0p_1p_2p_3$（以後，記号で $|p_0p_1p_2p_3|$ と書く）の表示を求めよう．

3角形の場合と同じ考え方である．3角形 $|p_0p_1p_2|$ の場合は動点 p' が線分 $|p_0p_1|$ 上を動いたが，今度は動点 p' が3角形 $|p_0p_1p_2|$ の上を動く．**4面体** $|p_0p_1p_2p_3|$ は，そのとき線分 $|p'p_3|$ が描きだす軌跡である（図 5.8 参照）．前節の結果から $|p_0p_1p_2|$ 上の動点 p' は，$p'=\eta_0p_0+\eta_1p_1+\eta_2p_2$（$\eta_0+\eta_1+\eta_2=1$, $\eta_0\geqq 0$, $\eta_1\geqq 0$, $\eta_2\geqq 0$）と書ける．また，線分 $|p'p_3|$ 上の点 p は $p=(1-t)p'+tp_3$ $(0\leqq t\leqq 1)$ と書ける．この2式から

$$p=(1-t)(\eta_0p_0+\eta_1p_1+\eta_2p_2)+tp_3$$

ここで，p_0, p_1, p_2, p_3 の係数を $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とおく（$\lambda_0=(1-t)\eta_0$, $\lambda_1=(1-t)\eta_1$, $\lambda_2=(1-t)\eta_2$, $\lambda_3=t$）．すると，

$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, $\lambda_0\geqq 0$, $\lambda_1\geqq 0$, $\lambda_2\geqq 0$, $\lambda_3\geqq 0$.

4面体はこのような点 p の全体であるから

$$|p_0p_1p_2p_3|=\left\{\lambda_0p_0+\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3p_3\,\middle|\,\sum_{i=0}^{3}\lambda_i=1,\ \lambda_0\geqq 0,\ \lambda_1\geqq 0,\ \lambda_2\geqq 0,\ \lambda_3\geqq 0\right\}$$

これが4面体のベクトル記号による表示である．点 $p=\sum_{i=0}^{3}\lambda_ip_i$ の位置は 図 5.8 の通り．

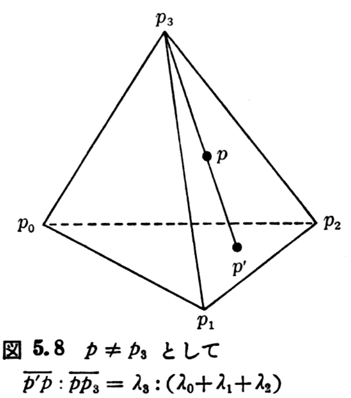


図 5.8　$p\neq p_3$ として
$\overline{p'p}:\overline{pp_3}=\lambda_3:(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)$
$p'=\dfrac{1}{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2}(\lambda_0p_0+\lambda_1p_1+\lambda_2p_2)$
（$p\neq p_0, p_1, p_2$ の各々に対応して同様の図が描ける）

とくに，点 $p=\sum_{i=0}^{3}\lambda_i p_i$ について

$$p\in|p_0p_1p_2|\Longleftrightarrow\lambda_3=0\qquad(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1,\ \lambda_0\geqq 0,\ \lambda_1\geqq 0,\ \lambda_2\geqq 0)$$

$$p\in|p_0p_1p_3|\Longleftrightarrow\lambda_2=0\qquad(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_3=1,\ \lambda_0\geqq 0,\ \lambda_1\geqq 0,\ \lambda_3\geqq 0),\ \text{etc.}$$

$$p=\frac{1}{4}p_0+\frac{1}{4}p_1+\frac{1}{4}p_2+\frac{1}{4}p_3 \text{ は } |p_0p_1p_2p_3| \text{ の重心である.}$$

4面体の表示から $\lambda_0\geqq 0,\ \lambda_1\geqq 0,\ \lambda_2\geqq 0,\ \lambda_3\geqq 0$ という範囲の制限を取り除くと，**4点 p_0, p_1, p_2, p_3 を通る3次元空間**の表示が得られる．すなわち

$$3\text{次元空間 } p_0p_1p_2p_3=\left\{\sum_{i=0}^{3}\lambda_i p_i\ \middle|\ \sum_{i=0}^{3}\lambda_i=1\right\}$$

4点 p_0, p_1, p_2, p_3 が一般の位置にあることから，この3次元空間の点について $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ は一意的に決まることがわかる．これを平面のときと同様に**重心座標**とよぶ．

我々は平面を‘外から’見ることに慣れているから，3点を通る平面は理解しやすい．しかし，上のような“4点を通る3次元空間”は少しわかりにくい．例を考えてみよう．

《例》 $\boldsymbol{R}^4$ の4点 $a_0=(1,0,0,0),\ a_1=(0,1,0,0),\ a_2=(0,0,1,0),\ a_3=(0,0,0,1)$ は一般の位置にある．そして上の表示から，3次元空間 $a_0a_1a_2a_3=\left\{\sum_{i=0}^{3}\lambda_i a_i\ \middle|\ \sum_{i=0}^{3}\lambda_i=1\right\}$．ここで $\sum_{i=0}^{3}\lambda_i a_i$ をベクトルとして成分ごとに計算すると，$\sum_{i=0}^{3}\lambda_i a_i=(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\in\boldsymbol{R}^4$．よって，上の表示を書きなおせば

$$3\text{次元空間 } a_0a_1a_2a_3=\left\{(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\in\boldsymbol{R}^4\ \middle|\ \sum_{i=0}^{3}\lambda_i=1\right\}$$

たとえば $\boldsymbol{R}^4$ の原点 $\mathbf{0}=(0,0,0,0)$ はこの3次元空間には属さない．

問題　3次元空間 $p_0p_1p_2p_3$ と，それに属さない1点 q がある．q を通る直線はこの3次元空間と高々1点でしか交わらないことを証明せよ．

答　仮に，異なる2点 q_1, q_2 で交わったとして矛盾を出せばよい．q_1, q_2 はこの3次元空間の点だから重心座標によって

$$q_1=\xi_0p_0+\xi_1p_1+\xi_2p_2+\xi_3p_3\qquad\left(\sum_{i=0}^{3}\xi_i=1\right)$$

$$q_2=\eta_0p_0+\eta_1p_1+\eta_2p_2+\eta_3p_3\qquad\left(\sum_{i=0}^{3}\eta_i=1\right)$$

と書ける．直線 q_1q_2 上の点 q は

$$\begin{aligned}q&=(1-t)q_1+tq_2\\&=((1-t)\xi_0+t\eta_0)p_0+((1-t)\xi_1+t\eta_1)p_1+((1-t)\xi_2+t\eta_2)p_2+((1-t)\xi_3+t\eta_3)p_3\end{aligned}$$

と表わせる．ここで p_0, p_1, p_2, p_3 の係数の和を計算すると

$$\sum_{i=0}^{3}((1-t)\xi_i+t\eta_i)=(1-t)\left(\sum_{i=0}^{3}\xi_i\right)+t\left(\sum_{i=0}^{3}\eta_i\right)=(1-t)+t=1$$

ゆえ，q もこの3次元空間に属さねばならない．これは点 q が3次元空間 $p_0p_1p_2p_3$ に属さないという仮定に矛盾する．証明終り．（この証明は，2点 q_1, q_2 が3次元空間 $p_0p_1p_2p_3$ に属せば，直線 q_1q_2 もすっかりその3次元空間に含まれてしまうことを示している．）

ひとつの平面 Π と，それに属さない1点 q があるとき，q を通る直線は Π と高々1点

でしか交わらない．Π には3次元的な‘厚み’がないからである．上の問題で示された事実は，3次元空間 $p_0p_1p_2p_3$ には‘4次元的な厚み’がないことを意味している．

単体

$\boldsymbol{R}^n$ に5点 p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 があるとして，いままでの議論をもう一回やってみよう．しつこくなるから細かい説明は繰り返さない．

【定義】 5点 p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 が同一の3次元空間に入らないとき，それらは**一般の位置にある**という．

【命題 5.c】 p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 が一般の位置にあるための必要十分条件は，次の条件（＊）である．

（＊）　実数 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ について $\sum_{i=0}^{4}\mu_i p_i = 0$,　$\sum_{i=0}^{4}\mu_i = 0$ となるのは，$\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ の場合に限る．

この条件（＊）を仮定し，5点 p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 についていままでの構成を拡張する．まず，3次元空間 $p_0p_1p_2p_3$ の中に4面体 $|p_0p_1p_2p_3|$ を考える．条件（＊）から，第5の点 p_4 はこの3次元空間に属さない．すると前ページの問題で注意したように，p_4 を通る直線と3次元空間 $p_0p_1p_2p_3$ とは高々1点でしか交わらない．とくに4面体 $|p_0p_1p_2p_3|$ の中に動点 p' をとると，線分 $|p'p_4|$ は4面体 $|p_0p_1p_2p_3|$ とその端点 p' でしか交わらない（図 5.9）．したがって，p' が4面体 $|p_0p_1p_2p_3|$ の中を動きまわるとき，線分 $|p'p_4|$ の描き出す軌跡はちょうど4面体 $|p_0p_1p_2p_3|$ を‘底面’とし p_4 を‘頂点’とする‘4次元の角錐’のような図形になる．この図形は，点（0次元），線分（1次元），3角形（2次元），4面体（3次元）と続いてきた系列の自然な延長上にある．この図形に名前をつけよう．いままでの，線分，3角形，4面体等の名称はあまり系統的とは思えないので，以後これらをすべて“単体”とよぶことにする．点は**0次元単体**，線分は**1次元単体**，3角形は**2次元単体**，4面体は**3次元単体**と改める．上で得られた‘4次元の角錐’は**4次元単体**である（図 5.10）．前と同様の議論で4次元単体 $|p_0p_1p_2p_3p_4|$ の表示を得る：

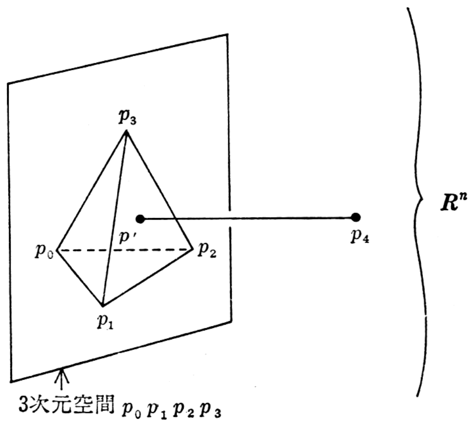


図 5.9

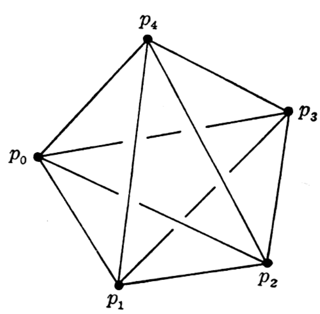


図 5.10　4次元単体を2次元平面上に描いた‘絵’

$$|p_0p_1p_2p_3p_4| = \left\{\sum_{i=0}^{4}\lambda_i p_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{4}\lambda_i = 1,\ \lambda_0 \geqq 0,\ \lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_3 \geqq 0,\ \lambda_4 \geqq 0\right\}$$

“5点 p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 を通る4次元空間” は，この表示から $\lambda_0 \geqq 0$, $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_3 \geqq 0$, $\lambda_4 \geqq 0$ という制限を取り除いたものである．

このような議論は，さらに6個の点，7個の点，etc. … と，どこまでも続けられる．そして，5次元単体，6次元単体，etc. が順次構成される．得られる表示も，どこまで行っても形式的に同じである．そこで，次のような一連の定義をしよう．

【定義】 (n: 十分大，として $\boldsymbol{R}^n$ の中で考える．)

(1) $(m+1)$ 個の点 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ が**一般の位置にある**とは，次の条件 (＊) が満たされることをいう．

(＊) 実数 $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_m$ について $\sum_{i=0}^{m} \mu_i p_i = 0$, $\sum_{i=0}^{m} \mu_i = 0$ が成り立つのは，$\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$ の場合に限る．

(2) 点 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ が一般の位置にあるとき，$\boldsymbol{m}$ **次元単体**(略して m 単体) $|p_0 p_1 \cdots p_m|$ とは次の式で定義される図形である．

$$|p_0 p_1 \cdots p_m| = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_0 \geqq 0,\ \cdots,\ \lambda_m \geqq 0 \right\}$$

(3) 同じ仮定のもとに，$\boldsymbol{p_0, p_1, \cdots, p_m}$ **を通る** $\boldsymbol{m}$ **次元空間**は次の式で定義される．

$$(m \text{ 次元空間 } p_0 p_1 \cdots p_m) = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

点 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ が一般の位置にあるという仮定から，m 次元空間 $p_0 p_1 \cdots p_m$ の点 $p = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i$ と，係数の $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ は1対1に対応する．$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ を**重心座標**という．

(4) m 単体 $|p_0 p_1 \cdots p_m|$ の点 $\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{m+1} p_i$ を $|p_0 p_1 \cdots p_m|$ の**重心**という．単体はしばしば σ, τ, 等のギリシア文字で表わされる．$\boldsymbol{m}$ 単体 $\boldsymbol{\sigma = |p_0 p_1 \cdots p_m|}$ の重心を記号で $\boldsymbol{p_\sigma}$ と書くことにする．

§5.4 複体と多面体

複体と多面体の正確な定義を与えよう．ハナ子とおじさんの話に出てきたように，複体は単体の集合であって，それを構成する単体同士の交わり方に適当な制約を設けたものである．3角形同士なら辺や頂点で，また4面体同士なら頂点，辺，面のいずれかできちんと交わらなければならない．そこで，複体を定義するには，3角形の辺や頂点，4面体の面，辺，頂点にあたる概念を一般の単体についても定義しておく必要がある．これが**辺単体**の概念である．

【補助定理】 n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ (n は十分大) を固定して考える．$\boldsymbol{R}^n$ の $(m+1)$ 個の点 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ が一般の位置にあれば，$\{0, 1, \cdots, m\}$ のどんな空でない部分集合 $\{i(0), i(1), \cdots, i(r)\}$ についても，$p_{i(0)}, p_{i(1)}, \cdots, p_{i(r)}$ は一般の位置にある．

証明 記号の便利のため，$\{i(0), i(1), \cdots, i(r)\} = \{0, 1, \cdots, r\}$ であると仮定して証明しよう．$p_0, p_1, \cdots, p_m$ が一般の位置にあるとして，始めから数えて $r+1$ 番目の点までの $p_0, p_1, \cdots, p_r$ も一般の位置にあることを示すのである $(0 \leqq r \leqq m)$．適当な実数 $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_r$ について，

$\mu_0 p_0+\mu_1 p_1+\cdots+\mu_r p_r=\mathbf{0}$, $\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_r=0$ が成り立つとしてみよう．これから $\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu_r=0$ を導けばよい．これらの式に形式的に $\mu_{r+1}=\cdots=\mu_m=0$ という $(m-r)$ 個のゼロをつけ加えて，$\mu_0 p_0+\cdots+\mu_r p_r+\mu_{r+1}p_{r+1}+\cdots+\mu_m p_m=\mathbf{0}$, $\mu_0+\cdots+\mu_r+\mu_{r+1}+\cdots+\mu_m=0$ という式と思いなおす．すると $p_0, p_1, \cdots, p_r, p_{r+1}, \cdots, p_m$ は仮定によって一般の位置にあるから，$\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu_r\,(=\mu_{r+1}=\cdots=\mu_m)=0$ でなければならない．これで証明できた．

m 単体 $|p_0p_1\cdots p_m|$ を考える．m 単体を考えるときは，$p_0, p_1, \cdots, p_m$ はすでに一般の位置にあるものと仮定している（cf. 前節末の定義）．すると補助定理により，$\{0, 1, \cdots, m\}$ のどんな空でない部分集合 $\{i(0), i(1), \cdots, i(r)\}$ についても，$p_{i(0)}, p_{i(1)}, \cdots, p_{i(r)}$ は一般の位置にある．よって r 単体 $|p_{i(0)}p_{i(1)}\cdots p_{i(r)}|$ が考えられる．

【定義】 r 単体 $|p_{i(0)}p_{i(1)}\cdots p_{i(r)}|$ をもとの単体 $|p_0p_1\cdots p_m|$ の r **次元辺単体**（略して r 辺単体）とよぶ．0辺単体 $|p_0|, |p_1|, \cdots, |p_m|$ を**頂点**という．頂点 $|p_i|$ を簡単に p_i と書くこともある．

この定義によれば，$|p_0p_1\cdots p_m|$ 自身は $|p_0p_1\cdots p_m|$ の m 辺単体ということになる．

《例 1》 線分（1単体）$|p_0p_1|$ の1辺単体はそれ自身．0辺単体は頂点 p_0 と p_1.

《例 2》 3角形（2単体）$|p_0p_1p_2|$ の2辺単体はそれ自身．1辺単体は文字通り3つの辺 $|p_0p_1|, |p_0p_2|, |p_1p_2|$. 0辺単体は p_0, p_1, p_2.

《例 3》 4面体（3単体）$|p_0p_1p_2p_3|$ の3辺単体はそれ自身．2辺単体は4つの3角形（面）: $|p_0p_1p_2|$, $|p_0p_1p_3|$, $|p_0p_2p_3|$, $|p_1p_2p_3|$. 1辺単体は6つの線分: $|p_0p_1|$, $|p_0p_2|$, $|p_0p_3|$, $|p_1p_2|$, $|p_1p_3|$, $|p_2p_3|$. 0辺単体は4つの頂点: p_0, p_1, p_2, p_3.

問題　m 単体の r 辺単体は何個あるか．

答　m 単体 $|p_0p_1\cdots p_m|$ の r 辺単体の個数は，$(m+1)$ 個の点 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ から $(r+1)$ 個の点 $p_{i(0)}, p_{i(1)}, \cdots, p_{i(r)}$ を選び出す仕方の数に等しい．これは組み合わせの公式から $\binom{m+1}{r+1}=\dfrac{(m+1)!}{(r+1)!(m-r)!}$ 通りである．たとえば4単体の2辺単体の個数は $\binom{5}{3}=\dfrac{5!}{3!2!}=10$ 個．

以後単体の記号として，ギリシア文字 $\sigma, \tau, \cdots$ を使うことにする．単体の次元をはっきりさせたいときは右肩に小さく書き添える．たとえば $\tau^2=|p_0p_1p_2|$, $\sigma^m=|p_0p_1\cdots p_m|$ など．

τ^q が σ^m の辺単体であることを，記号で $\tau^q<\sigma^m$（または $\sigma^m>\tau^q$）と書く．

さて，複体の定義を述べよう．

【定義】 R^n の中の単体の集合 K が次の条件 (1), (2) を満たすとき**複体**という．

(1)　$\sigma\in K$, $\sigma>\tau$　ならば　$\tau\in K$

(2)　$\sigma\in K$, $\tau\in K$ かつ $\sigma\cap\tau\neq\phi$ ならば，$\sigma\cap\tau<\sigma$ かつ $\sigma\cap\tau<\tau$

条件 (1) は，σ が K の構成メンバーなら σ のどんな辺単体も K の構成メンバーになっているということである．たとえば

《例 4》 $K=\{|p_0p_1|\}$（ひとつの1単体 $|p_0p_1|$ からなる集合）は複体ではない．$|p_0p_1|$ の辺単体 $|p_0|, |p_1|$ が K に属さないので条件 (1) が満たされないからである．$K_1=\{|p_0p_1|, |p_0|, |p_1|\}$ とすればこんどは条件 (1) が満たされるから複体になる．

条件 (2) は K の単体同士の交わり方の制限である．K の単体 σ,τ が交わるとしたら，共通部分 $\sigma\cap\tau$ は σ の辺単体でもあり，τ の辺単体でもあるということ，いいかえれば辺単体以外の中途はんぱな所で交わってはいけないということである．

《例 5》 図 5.11 のように頂点に記号をつける．$K=\{|abc|, |bcd|, |def|, |ab|, |ac|, |bc|, |bd|, |cd|, |de|, |df|, |ef|, |dg|, |gh|, |a|, |b|, |c|, |d|, |e|, |f|, |g|, |h|\}$ は複体である．

《例 6》 図 5.12 のような単体の集合 $K=\{|abc|, |ab|, |bc|, |ac|, |de|, |a|, |b|, |c|, |d|, |e|\}$ は複体ではない．条件 (2) が満たされないからである．実際 $|abc|\cap|de|=|d|$ は $|abc|$ の辺単体でない．

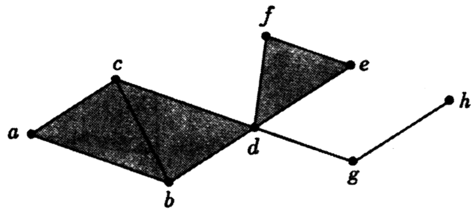


図 5.11

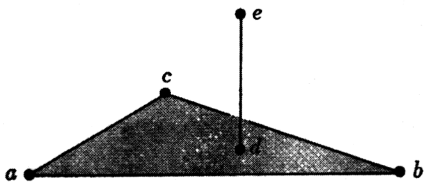


図 5.12

《例 7》 図形としては図 5.12 と同じでも，$|abc|$ を 3 つの 3 角形でおきかえた図 5.13 のような単体の集まりは複体である．

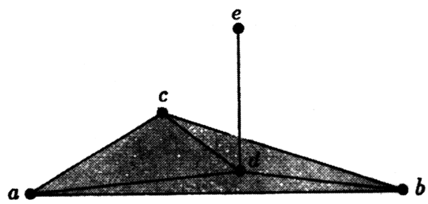


図 5.13

例 6 と例 7 により，複体は図形というより‘単体の集合’であることがはっきりすると思う．

《例 8》 m 単体 $\sigma=|p_0p_1\cdots p_m|$ のすべての辺単体の集合を $K(\sigma)$ とすれば $K(\sigma)$ は複体になる．

証明 σ の辺単体 τ の辺単体はもとの σ の辺単体だから，複体の条件 (1) は満たされる．複体の条件 (2) を確かめよう．まず次の補助定理を準備しておく．

【補助定理】 $\sigma=|p_0p_1\cdots p_m|$ の点 $p=\sum_{i=0}^{m}\lambda_ip_i$ が辺単体 $\tau=|p_{i(0)}p_{i(1)}\cdots p_{i(r)}|$ に属するための必要十分条件は，部分集合 $\{i(0), i(1), \cdots, i(r)\}$ に属さないすべての番号 $i\in\{0, 1, \cdots, m\}$ について $\lambda_i=0$ となること．

実際，$\{i(0), i(1), \cdots, i(r)\}$ に属さぬすべての番号 i について $\lambda_i=0$ であれば $p=\sum_{i=0}^{m}\lambda_ip_i=\sum_{k=0}^{r}\lambda_{i(k)}p_{i(k)}$ であるから $p\in\tau$ である．逆に $p\in\tau$ であれば，$p=\sum_{k=0}^{r}\lambda_{i(k)}p_{i(k)}$ と書けているが，これに形式的に $\lambda_i=0$ $(i\in\{0, 1, \cdots, m\}-\{i(0), \cdots, i(r)\})$ をつけ加えて σ の重心座標と思いなおせる．重心座標の一意性から $\lambda_i=0$ $(i\in\{0, 1, \cdots, m\}-\{i(0), \cdots, i(r)\})$．

この補助定理から容易に次のことがわかる．σ の 2 つの辺単体 $\rho=|p_{i(0)}p_{i(1)}\cdots p_{i(r)}|$ と $\tau=|p_{j(0)}p_{j(1)}\cdots p_{j(s)}|$ について，点 $p=\sum_{i=0}^{m}\lambda_ip_i$ が $\rho\cap\tau$ に属するための必要十分条件は，$\{i(0), i(1), \cdots, i(r)\}$ と $\{j(0), j(1), \cdots, j(s)\}$ の共通部分に含まれないすべての番号 i について $\lambda_i=0$ となること．つまり，$\{i(0), i(1), \cdots, i(r)\}\cap\{j(0), j(1), \cdots, j(s)\}=\{k(0), \cdots, k(t)\}$ なら $\rho\cap\tau=|p_{k(0)}p_{k(1)}\cdots p_{k(t)}|$ である．これは ρ,τ 両方の辺単体になっている．また $\{i(0), i(1), \cdots, i(r)\}\cap\{j(0), j(1), \cdots, j(s)\}=\phi$ なら $\rho\cap\tau=\phi$ である．

以上で，$\rho \cap \tau \neq \phi \Longrightarrow \rho \cap \tau < \rho,\ \rho \cap \tau < \tau$ ということがわかったので，複体の条件(2)が確かめられた．《例 8》の証明終り．

《**例 9**》 $\sigma = |p_0 p_1 \cdots p_m|$ を m 単体とし，$K(\sigma)$ を例8の複体とする．$K(\sigma)$ から σ 自身を除いたものを $K(\partial\sigma)$ と書く．（$\partial\sigma$ は σ の‘境界’という意味．）すなわち，$K(\partial\sigma) = K(\sigma) - \{\sigma\} = \{\rho \mid \rho < \sigma$ かつ $\rho \neq \sigma\}$．$K(\partial\sigma)$ は複体である．

【定義】 K を複体，L を K の部分集合とする．L がそれ自身複体のとき L を K の**部分複体**という．

たとえば，$K(\partial\sigma)$ は $K(\sigma)$ の部分複体である．

《**例 10**》 図 5.14 のように，平面を無限個の3角形，線分，頂点に分解したとき，この3角形，線分，頂点の集合は複体である．

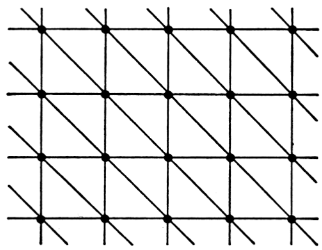


図 5.14

複体 K に属する単体が全部で有限個のとき，K を**有限複体**という（例 10 より前の諸例）．例 10 のように，有限でない複体を**無限複体**とよぶことがある．

複体がわかったから次に多面体を定義しよう．

【定義】 複体 K に属するすべての単体の和集合をとった図形を（K の）**多面体**という．記号で $|K|$ と書く．$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$.

《**例 5′**》 K を例5の複体とする．$|K|$ は図 5.15 のような図形である．

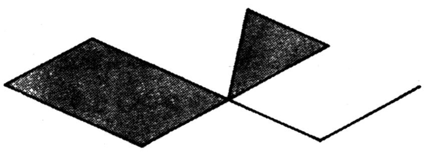


図 5.15

《**例 8′**》 $\sigma = |p_0 p_1 \cdots p_m|$ とする．例8の複体 $K(\sigma)$ の多面体 $|K(\sigma)|$ は σ 自身にほかならない：$|K(\sigma)| = \sigma$．σ は m 次元円板 D^m に位相同形である．（下のノートを見よ．）

《**例 9′**》 $K(\partial\sigma)$ を例9の複体とする．多面体 $|K(\partial\sigma)|$ を σ の**境界**とよぶ．記号で $\partial\sigma$ と書く．$\partial\sigma$ は $(m-1)$ 次元球面 S^{m-1} と位相同形である．すなわち，$\partial\sigma = |K(\partial\sigma)| \approx S^{m-1}$．（下のノート (2) を見よ．）

有限複体の多面体を**有限多面体**という．

【命題 5.d】 有限多面体はコンパクトである．

なぜなら $\sigma^m \approx D^m$ であり，D^m はコンパクト．よってコンパクト性の位相不変性から任意の単体はコンパクトである（§4.2，命題 4.e および例 9）．有限多面体は，それらの有限個の和集合ゆえコンパクトになる．（$\boldsymbol{R}^n$ の図形については，コンパクト $\Longleftrightarrow$ 有界閉集合．そして有界なこと，および閉集合であることは有限個の和集合をとっても変わらないから．）

●ノート

(1) 錐 (cone) について

X を $\boldsymbol{R}^n$ の図形とする．X に属さぬ1点 p_0（$\in \boldsymbol{R}^n$）が X に関して**錐構成可能な位置にある**というのは，X の任意の点 x と p_0 を両端とする線分 $|p_0 x|$ は x 以外で X に交わらな

いことである(i.e. 任意の $x \in X$ について $|p_0x| \cap X = \{x\}$).そのとき，このような線分の全体の和集合（それは $\boldsymbol{R}^n$ の図形)を，X を**底**とし，p_0 を**頂点**とする**錐**（スイ，cone）とよぶ．記号で $p_0 * X$ と書く．すなわち，$p_0 * X = \bigcup_{x \in X} |p_0x|$．錐は円錐，角錐などを拡張した概念である．図 5.16 を見よ．

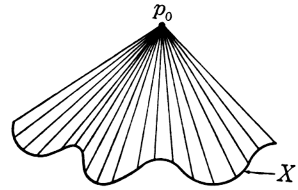


図 5.16 錐 $p_0 * X$

《例》 m 単体 $\sigma = |p_0p_1 \cdots p_m|$ は，任意の $(m-1)$ 辺単体を底とする錐の構造をもつ．$|p_0p_1 \cdots p_m| = p_i * |p_0p_1 \cdots \hat{p}_i \cdots p_m|$．ここで，$\hat{}$ はその下の点を取り除く記号.

K を複体とし，点 p_0 を多面体 $|K|$ に関して錐構成可能な位置にある1点とする．単体の集合 $p_0 * K$ を次のように定義する．

$$p_0 * K = K \cup \{p_0 * \sigma \mid \sigma \in K\} \cup \{p_0\}$$

σ が K の m 単体なら，$p_0 * \sigma$ は $(m+1)$ 単体であることに注意．このとき $p_0 * K$ は複体になる．これを**錐複体**とよぶ．$|p_0 * K| = p_0 * |K|$ である．図 5.17 を見よ．

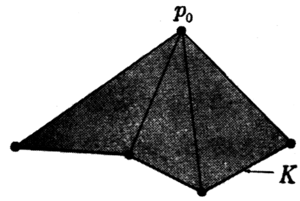


図 5.17 錐複体 $p_0 * K$

【補助定理】 $X_0 \approx X_1 \Longrightarrow p_0 * X_0 \approx p_1 * X_1$

証明の概略 $f: X_0 \longrightarrow X_1$ を同相写像とする．p_0 以外の $p_0 * X_0$ の点 p は $p = (1-t)p' + tp_0$ ($p' \in X_0$, $0 \leqq t < 1$) と一意的に書ける．$F: p_0 * X_0 \longrightarrow p_1 * X_1$ を，$F(p) = (1-t)f(p') + tp_1$ と定義する．また，$F(p_0) = F(p_1)$ とおく．この F は同相写像になる．

(2) 胞体について

胞体は単体の拡張概念である．2次元の場合，単体は3角形であるが，胞体はもっと一般に任意の凸多角形のことである．また3次元なら4面体（これは単体），立方体，凸多面体などが胞体である．凸多角形や凸多面体は，いくつかの半平面または半空間の共通部分として表わせる．これを拡張して一般次元の胞体が定義できる．

Π を $\boldsymbol{R}^n$ の中の m 次元空間とする．(たとえば一般の位置にある $p_0, p_1, \cdots, p_m$ を通る m 次元空間を考える．) Π 上の関数 $f: \Pi \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が**線形関数**であるとは，任意の $p, q \in \Pi$ と $t \in \boldsymbol{R}$ について $f((1-t)p + tq) = (1-t)f(p) + tf(q)$ が成り立つことである．この定義から，f が線形関数なら

$$f(p) \geqq 0,\ f(q) \geqq 0 \Longrightarrow \text{線分 } |pq| \text{ 上のすべての点で } f \geqq 0$$

$$f(p) > 0,\ f(q) \geqq 0 \Longrightarrow \text{線分 } |pq| \text{ の } q \text{ 以外の点で } f > 0$$

がわかる．$f: \Pi \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が恒等的に0でない線形関数のとき，$f \geqq 0$ なる範囲を，$f \geqq 0$ で決まる Π の**半空間**という．

【定義】 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ を Π 上の線形関数とする．$C = \{p \in \Pi \mid f_1(p) \geqq 0,\ f_2(p) \geqq 0, \cdots, f_k(p) \geqq 0\}$ という形の点集合が空集合 ϕ でない有界な図形なら，C を**胞体**という．また，C の中に $f_1(p) > 0,\ f_2(p) > 0, \cdots, f_k(p) > 0$ という点 p があるとき，C の**次元**は m であるという．(Recall: m は Π の次元だった．) そのような点を C の**内点**という．内点でない C の点を C の**境界点**という．p が C の境界点なら $f_i(p) \geqq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$,

しかも少くともひとつの i について $f_i(p)=0$ である．C の内点の全体を C の**内部**といい，記号で $\mathrm{Int}(C)$ と書く（Int は interior の略）．C の境界点の全体を C の**境界**とよぶ．記号で ∂C と書く．$C=\mathrm{Int}(C)\cup\partial C$, $\mathrm{Int}(C)\cap\partial C=\phi$ である．

内部と境界は次のようにも定式化できる．

$$p\in\mathrm{Int}(C)\Leftrightarrow\min\{f_1(p),\cdots,f_k(p)\}>0,\qquad p\in\partial C\Leftrightarrow\min\{f_1(p),\cdots,f_k(p)\}=0$$

（min は k 個の値 $f_1(p),\cdots,f_k(p)$ の最小値）

《例》　$\sigma=|p_0p_1\cdots p_m|$ を m 単体とする．$p_0,p_1,\cdots,p_m$ を通る m 次元空間 Π の上の線形関数 $f_0,f_1,\cdots,f_m:\Pi\longrightarrow\boldsymbol{R}$ を次のように定義する．$p=\sum_{i=0}^{m}\lambda_ip_i\left(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i=1\right)$ について $f_i(p)=\lambda_i$. すると $|p_0p_1\cdots p_n|=\{p\in\Pi\,|\,f_0(p)\geqq0,\ \cdots,\ f_m(p)\geqq0\}$ であるから σ は上の意味で胞体である．重心 p_σ では $f_0(p_\sigma)=f_1(p_\sigma)=\cdots=f_m(p_\sigma)=\dfrac{1}{m+1}>0$. よって p_σ は σ の内点であり σ の胞体としての次元も m である．σ の胞体としての境界は $\partial\sigma$ $(=|K(\partial\sigma)|)$ に一致する．σ の内部 $\mathrm{Int}(\sigma)$ は $\sigma-\partial\sigma$ である．

《例の例》　$\sigma=|p_0p_1p_2|$ のとき，$\partial\sigma=|p_0p_1|\cup|p_0p_2|\cup|p_1p_2|$ は3角形の周囲．$\mathrm{Int}(\sigma)$ は3角形の内部．

C を m 次元空間 Π の中の m 次元胞体（略して m 胞体），$f_1,\cdots,f_k$ を，C を定義する線形関数とする．$\{f_1,\cdots,f_k\}$ から，空でない部分集合 $\{f_{i(1)},f_{i(2)},\cdots,f_{i(l)}\}$ を取り出し，C の部分集合 $\{p\in C\,|\,f_{i(1)}(p)=f_{i(2)}(p)=\cdots=f_{i(l)}(p)=0\}$ を考える．これが空 (ϕ) でないとき，この部分集合を C のひとつの**面**（face）とよぶ．便宜上 C 自身もひとつの面とする．単体 $\sigma=|p_0p_1\cdots p_m|$ の任意の辺単体はこの意味で σ の面である．C のひとつひとつの面はそれ自身，適当な次元の胞体になっている．∂C は C 自身以外の，C のすべての面の和集合に一致する．

【補助定理】　C を m 次元空間 Π の中の m 胞体，p_0 を $\mathrm{Int}(C)$ の任意の1点とする．p_0 を始点とする Π の中の半直線は ∂C とただ1点で交わる（図 5.18）．（とくに，p_0 は ∂C に関して錐構成可能な位置にあり，$p_0*\partial C=C$ である．）

証明　$C=\{p\in\Pi\,|\,f_1(p)\geqq0,\ \cdots,\ f_k(p)\geqq0\}$ とする．Π の点 p に，k 個の値 $f_1(p),\cdots,f_k(p)$ の最小値 $\min\{f_1(p),\ \cdots,\ f_k(p)\}$ を対応させる関数 $f(p)$ は，Π 上の連続関数である．そして $C=\{p\in\Pi\,|\,f(p)\geqq0\}$. また $\partial C=\{p\in\Pi\,|\,f(p)=0\}$.

さて $p_0\in\mathrm{Int}(C)$ を始点とする半直線 l の上での関数 f の値の変化を調べる．C は有界ゆえ，l 上の動点 p' が十分遠い所にあれば $f(p')<0$. また $p_0\in\mathrm{Int}(C)$ であるから $f(p_0)>0$. よって l 上のどこかの点でゼロになる．その点を p_1 とおく．線形関数 $f_1,\cdots,f_k$ のどの f_i についても $f_i(p_0)>0$, $f_i(p_1)\geqq0$ であるから，線分 $|p_0p_1|$ 上の p_1 以外の点では常に $f_i>0$. よって $|p_0p_1|$ 上の p_1 以外の点では $f>0$. l 上 p_1 よりさらに遠い所に

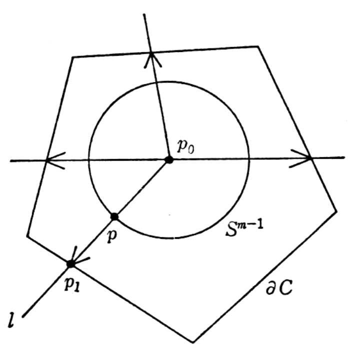


図 5.18

$f(p_1') = 0$ となる p_1' があれば，同じ議論で $f(p_1) > 0$ になり，矛盾．したがって，関数 f は l 上のただ1点 p_1 でゼロになる．よって l は，$\partial C = \{p \in \Pi \mid f(p) = 0\}$ とただ1点 p_1 で交わる．証明終り．

この補助定理を利用して m 胞体 $C \approx D^m$，$\partial C \approx S^{m-1}$ が示せる．証明のアイデアは図 5.18 を見よ．（まず $\partial C \approx S^{m-1}$ を示し，前のノート (1) の補助定理を使って $C \approx D^m$ を示せ．）

§5.5 複体の細分

複体は多面体を単体の集合に分割したものだった．複体 K を構成する個々の単体をさらに細かい単体の集合に分割し，より小さい単体からなる複体を作る操作が考えられる．これを複体 K の**細分**という．複体を細分する仕方にはいろいろある（図 5.19）．

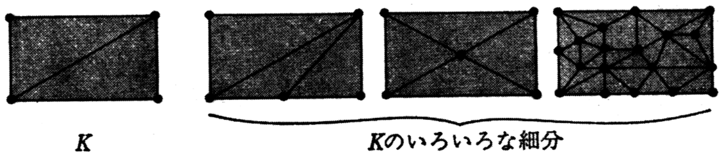


図 5.19

一応，細分の正式な定義を与えておこう．

【定義】 複体 K, L があり

（i） $|K| = |L|$ （K と L は同じ多面体を分割したもの）

（ii） L のどの単体 σ も，K のどれかの単体 τ に含まれている．

この2条件が満たされるとき，L を K の**細分**という．

複体 K を細分する方法のうち，標準的なやり方がひとつある．**重心細分**とよばれる方法である．説明の便宜上次の定義をする．

【定義】 (1) 複体 K の**次元**とは，K に属する単体の次元の最大値．記号：$\dim K$.

(2) $r = 0, 1, 2, \cdots$ について，K の r **骨格**とは，K に属する r 次元以下の単体の集合のこと．記号：$K^{(r)}$．すなわち，$K^{(r)} = \{\sigma \in K \mid \dim \sigma \leqq r\}$．$\dim K = m$ なら $K^{(m)} = K$ である．また $K^{(0)}$ は K の頂点の集合である．任意の $r = 0, 1, 2, \cdots$ について $K^{(r)}$ は K の部分複体である．

《例》 $\sigma = |p_0 p_1 \cdots p_m|$ のとき $K(\sigma)^{(m-1)} = K(\partial\sigma)$.

複体 K の重心細分は大雑把に言って K の各単体 σ を，σ の重心 p_σ をひとつの頂点にもついくつかの小単体に分割したものである．正確に構成するには，K の0骨格，1骨格，… と低い次元から順々に分割していかねばならない．複体 K の重心細分を K' と書くことにしよう．K' の構成は次の通りである．

$K^{(0)}$ の重心細分 $(K^{(0)})'$ は $K^{(0)}$ そのまま．

$K^{(1)}$ の重心細分 $(K^{(1)})'$ は $K^{(1)}$ の各々の1単体 σ をその中点 p_σ（重心！）で2等分したもの．

1個の1単体 $\sigma=|p_0p_1|$ を p_σ で2等分したものは $\{|p_0p_\sigma|, |p_\sigma p_1|, |p_0|, |p_1|, |p_\sigma|\}$ という複体と考えられる．錐複体の記号（cf. 前節 §5.4 末のノート）を使えば，これは $p_\sigma * K(\partial\sigma)$ と書ける．$(K^{(1)})'$ は $K^{(1)}$ の各々の1単体 σ を錐複体 $p_\sigma * K(\partial\sigma)$ でおきかえたものである：$(K^{(1)})' = \bigcup_{\sigma\in K, \dim\sigma=1} p_\sigma * K(\partial\sigma)$（図 5.20）．

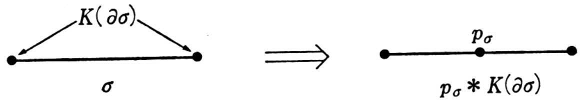


図 5.20

$K^{(2)}$ の重心細分 $(K^{(2)})'$：$K^{(2)}$ の2単体 σ について，その境界 $\partial\sigma$ は $|(K^{(1)})'|$ に含まれるから，すでに重心細分されて $K(\partial\sigma)'$ となっている．$K^{(2)}$ の各々の2単体 σ を錐複体 $p_\sigma * K(\partial\sigma)'$ でおきかえたものが $(K^{(2)})'$ である：$(K^{(2)})' = \bigcup_{\sigma\in K, \dim\sigma=2} p_\sigma * K(\partial\sigma)'$（図 5.21）．

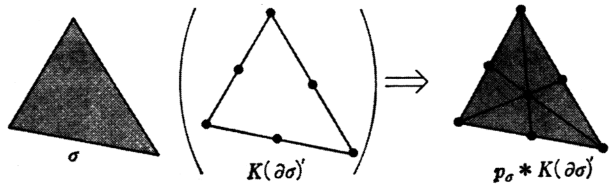


図 5.21

同様に進んで $(K^{(r-1)})'$ が構成されたとして $K^{(r)}$ の重心細分 $(K^{(r)})'$：$K^{(r)}$ の r 単体 σ について，その境界 $\partial\sigma$ は $|(K^{(r-1)})'|$ に含まれるから，すでに重心細分されて $K(\partial\sigma)'$ となっている．$K^{(r)}$ の各々の r 単体 σ を錐複体 $p_\sigma * K(\partial\sigma)'$ でおきかえたものが $(K^{(r)})'$ である：$(K^{(r)})' = \bigcup_{\sigma\in K, \dim\sigma=r} p_\sigma * K(\partial\sigma)'$

以下同様に進んで K の重心細分 K' が定義できる．（$m=\dim K$ のときは，$K'=(K^{(m)})'$ にほかならない．）

《例》 図 5.22 の複体 K の重心細分 K'．

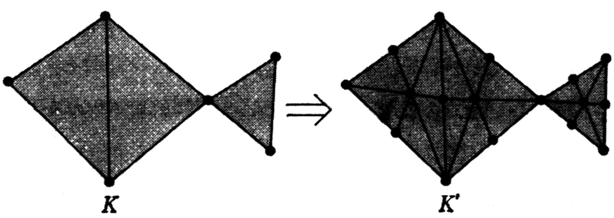


図 5.22

K が複体であることと K' を構成する各段階で単体 σ を<u>複体</u> $p_\sigma * K(\partial\sigma)'$ でおきかえたこととを使って，K' が複体であることが証明できる．

研究問題　このことを確かめよ．

（ヒント）　$(K^{(0)})', (K^{(1)})', (K^{(2)})', \cdots$ が次々に複体になることを帰納法で示せばよい．

図 5.22 に見るように，複体 K を重心細分すると，K' の単体はみなもとの K の単体より小さくなっている．これがどの程度のものか定量的に表わしてみよう．まず $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクトな図形 C について，C の<u>直径</u> $\delta(C)$ を ‘C に属する2点 p, q の距離 $d(p,q)$ の最大値’ と定義する．$d(p,q)$ は，直積 $C\times C$ の点 (p,q) に連続的に依存する関数であり，コンパクトな図形の直積 $C\times C$ はコンパクトだから（cf. §4.2, 例12），最大値の定理（§4.2, 定理 4.5）によって $d(p,q)$ の最大値は確かに存在するのである．

以下 K を有限複体とし，K に属する単体 σ の直径 $\delta(\sigma)$ の最大値を，K の **mesh** とよぼう．記号で $\mathrm{mesh}(K)$ と書く：$\mathrm{mesh}(K)=\max\{\delta(\sigma)\mid\sigma\in K\}$．$\mathrm{mesh}(K)$ は K に属す

る一番大きな単体の直径であるから，mesh(K) が小さいということは，K のすべての単体が小さいということである．次の定理は，重心細分 K' をとることにより，mesh が確実に小さくなることを示している．

【定理 5.1】 K を有限複体，$m=\dim(K)$ とする．そのとき $\mathrm{mesh}(K') \leqq \dfrac{m}{m+1}\mathrm{mesh}(K)$.

【系】 K' をもう一度重心細分したものを K''，K'' をさらに重心細分したものを K'''，… とすると，$\mathrm{mesh}(K'') \leqq \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^2 \mathrm{mesh}(K)$，$\mathrm{mesh}(K''') \leqq \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^3 \mathrm{mesh}(K), \cdots$．よって mesh がいくらでも小さい，$K$ の細分が存在する．

定理 5.1 の証明は省略する．

共通細分

【定理 5.2】 複体 K_1, K_2 が同じ多面体の異なる分割であるとする：$|K_1|=|K_2|$．そのとき，K_1, K_2 の共通の細分であるような複体 L が存在する．(この L を K_1, K_2 の**共通細分**とよぶ．共通細分を細分したものはまた共通細分だから，共通細分はいくらでもある．)

《例》 共通細分の作り方 (図 5.23)．K_1, K_2 は長方形の 2 つの分割．両者を重ね合わせて，3 角形でない部分を分割すると，共通細分 L が得られる．

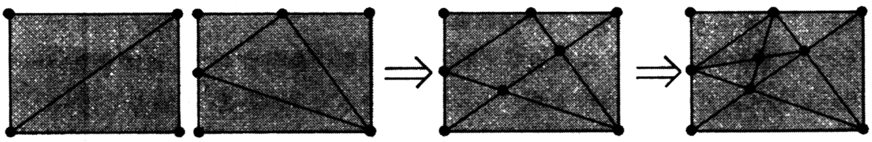


図 5.23

定理 5.2 の証明 証明のアイデアは簡単で，図 5.23 で尽くされている．K_1 と K_2 の‘重ね合わせ’なるものは $\sigma\cap\tau$ $(\sigma\in K_1,\ \tau\in K_2)$ という図形によって多面体 $|K_1|$ を分割したものである．容易にわかるように，$\sigma\cap\tau$ は胞体である．(胞体については，前節末のノート (2) を見よ．) $\sigma\cap\tau$ $(\sigma\in K_1,\ \tau\in K_2)$ という形の胞体すべての集合を M とすると，M は複体の条件 (1), (2) とよく似た性質 (1)$'$, (2)$'$ をもっている．

(1)$'$ $C\in M$，かつ D が C の面 $\Longrightarrow D\in M$

(2)$'$ $C\in M,\ D\in M \Longrightarrow C\cap D$ は C の面でもあり D の面でもある．

この 2 性質をもつ胞体の集合を**胞体的複体**という．(前に定義した複体を，**単体的複体**とよぶことがある．) 胞体的複体についても細分の概念が定義できる．定理 5.2 を証明するキー・ポイントは，任意の胞体的複体は単体的複体に細分できることを示すことである．

胞体的複体 M の r 骨格 $M^{(r)}$ を，前と同様に $M^{(r)}=\{C\in M \mid \dim C\leqq r\}$ と定義する．$r=0,1,2,\cdots$ と低い次元から順々に，胞体的複体 $M^{(r)}$ を単体的複体 $(M^{(r)})'$ に分割していく．このアイデアは重心細分と同じである．簡単に繰り返せば：

$(M^{(0)})'$ は $M^{(0)}$ と同じ．

$(M^{(1)})'$ は $M^{(1)}$ の任意の 1 胞体 (＝線分) をその内点 (両端に一致しない点) で 2 分したもの．

………………

$(M^{(r)})'$ の構成：$M^{(r)}$ の任意の r 胞体 C につき，$\partial C \subset |(M^{(r-1)})'|$ だから，∂C はすでに単体的複体（これを $K(\partial C)'$ と書こう）に分割されている．C の内部に1点 p_C をとり，C を錐複体 $p_C * K(\partial C)'$ でおきかえる．

……………

以下同様に進んで，M を単体的複体に分割することができる．証明終り．

さて，前節で多面体を定義したときは，'複体 K の多面体 $|K|$' という形だったので，多面体は複体 K に従属したものであるかのような印象があった．しかし，多面体は図形であるから特別の複体 K にこだわる必要はない．そのことをはっきりさせおこう．つまり多面体 X とは $X=|K|$ という（単体的）複体 K が少くともひとつ見出せるような図形である．複体 K を X のひとつの**単体分割**とよぶ．

【系 1】 X と Y が多面体なら，直積 $X \times Y$ も多面体である．

なぜなら $X=|K|$，$Y=|L|$ という単体分割 K, L が見出せる．$\sigma \times \tau$ $(\sigma \in K,\ \tau \in L)$ という形の図形は胞体であり，これらすべての集合 M は $X \times Y$ を分割する胞体的複体になっている．M を単体的複体に分割したものを M' とすれば $X \times Y = |M'|$ である．

《例》 線分 $I=[0,1]$，正方形 $I^2=[0,1]\times[0,1]$，立方体 $I^3=I^2 \times I$，…，n 次元の立方体 $I^n = I^{n-1} \times I$，… はみな多面体である．

ひとつの m 単体を $(m-1)$ 次元以下の単体の有限個に分解することはできないから（これは直観的には明らかだが証明を要する．ここでは認める），複体 K を細分して L にしたとき，$\dim K = m$ なら $\dim L = m$ である．次元は複体の細分によって変わらない．

【系 2】 X を多面体とし，$X=|K_1|=|K_2|$ とする．そのとき $\dim K_1 = \dim K_2$ が成り立つ．（この共通の値を **X の次元**とよび，$\dim X$ で表わす．）

なぜなら，$|K_1|=|K_2|$ のとき両者に共通の細分 L がとれる（定理 5.2）．次元は細分により不変だから，$\dim K_1 = \dim L = \dim K_2$．

《例》 多面体 X, Y について $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

証明 胞体的複体 M の次元を $\dim M = \max\{\dim(C) \mid C \in M\}$ と定義する．これも次元によって変わらないから，M を細分した単体的複体 M' の次元は $\dim M$ に等しい．$X=|K|$，$Y=|L|$ として，$M=\{\sigma \times \tau \mid \sigma \in K,\ \tau \in L\}$ とする．$\dim(\sigma\times\tau) = \dim\sigma + \dim\tau$．よって K の最大次元の単体 σ_0 と L の最大次元の単体 τ_0 の直積 $\sigma_0 \times \tau_0$ が M の最大次元の胞体を与える．したがって $\dim(X\times Y) = \dim(M') = \dim M = \dim(\sigma_0\times\tau_0) = \dim\sigma_0 + \dim\tau_0 = \dim X + \dim Y$.

§5.6 オイラー標数

K を有限複体として，K のオイラー標数を定義しよう．$m = \dim K$ とし，

$\alpha_0(K) = K$ の頂点（0単体）の個数

$\alpha_1(K) = K$ の1単体の個数

....

$\alpha_m(K) = K$ の m 単体の個数

とおく.

【定義】 $\chi(K) = \alpha_0(K) - \alpha_1(K) + \alpha_2(K) - \cdots + (-1)^m \alpha_m(K) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \alpha_i(K)$ を，複体 K の**オイラー標数**という.

《例 1》 図 5.24 の複体のオイラー標数は 1.

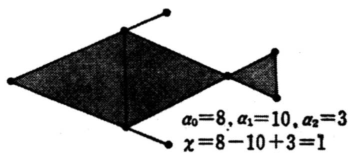


図 5.24

《例 2》 $\sigma = |p_0 p_1 \cdots p_m|$ を m 単体とする.

$\chi(K(\sigma)) = 1$ である.

なぜなら，§5.4 の問題により，$\alpha_r(K(\sigma)) = \binom{m+1}{r+1}$. よって，2項定理から

$$-1 + \chi(K(\sigma)) = -1 + \binom{m+1}{1} - \binom{m+1}{2} + \cdots + (-1)^m \binom{m+1}{m+1} = -(1 + (-1))^{m+1} = 0$$

$$\therefore \quad \chi(K(\sigma)) = 1.$$

《例 3》 $\sigma = |p_0 p_1 \cdots p_m|$ を m 単体とする. $\chi(K(\partial\sigma)) = 1 - (-1)^m$ である.

なぜなら，$0 \leqq i \leqq m-1$ のとき，$\alpha_i(K(\partial\sigma)) = \alpha_i(K(\sigma))$. $i = m$ のとき，$\alpha_m(K(\partial\sigma)) = 0$, $\alpha_m(K(\sigma)) = 1$. よって，$\chi(K(\partial\sigma)) = \chi(K(\sigma)) - (-1)^m \alpha_m(K(\sigma)) = 1 - (-1)^m$. たとえば，$\chi(K(\partial\sigma^1)) = 2$, $\chi(K(\partial\sigma^2)) = 0$, $\chi(K(\partial\sigma^3)) = 2$, $\chi(K(\partial\sigma^4)) = 0$, etc. $\cdots$.

この節の目的は次の定理の証明である.

【定理 5.3】 K_1, K_2 が同一の多面体の分割ならば，$\chi(K_1) = \chi(K_2)$ である（図 5.25 参照).

以後の便宜上，有限の胞体的複体 M についても，オイラー標数 $\chi(M)$ を定義しておくのがよい. $\alpha_i(M) = (M$ に含まれる i 胞体の数）とし，$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \alpha_i(M)$ $(m = \dim M)$ とおくのである.

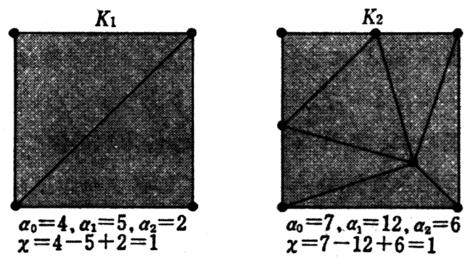


図 5.25　実験例

定理 5.3 の証明（本間 [9] による）

まず，n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の**超平面**を定義しよう. $f: \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を，$\boldsymbol{R}^n$ 上の任意の（'恒等的に 0' でない）線形関数とし（線形関数については §5.4 末のノート (2) 参照)，$f = 0$ となる点全体 Π を $\boldsymbol{R}^n$ の超平面というのである. $f \geqq 0, f \leqq 0$ に対応する範囲 $H_+(f)$, $H_-(f)$ は，それぞれ Π により分けられた $\boldsymbol{R}^n$ の半空間である. $\boldsymbol{R}^n$ の中に一般の位置にある n 個の点 $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$ をとると，これらを通る $(n-1)$ 次元空間は $\boldsymbol{R}^n$ の超平面の例になる.

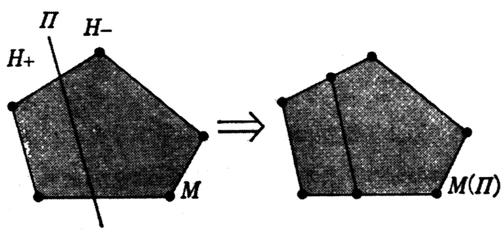


図 5.26

さて，M を有限の胞体的複体とし，$|M|$

$\subset \boldsymbol{R}^n$ とする（$|M|$ は M の‘多面体’）．任意の超平面 Π をひとつとる．**Π による M の切断**とよばれる M の細分 $M(\Pi)$ を定義しよう．切断のアイデアは図 5.26 を見よ．

Π による $\boldsymbol{R}^n$ の半空間を H_+, H_- とし，

$$M(\Pi) = \{C \cap H_+ \mid C \in M,\ C \cap H_+ \neq \phi\} \cup \{C \cap H_- \mid C \in M,\ C \cap H_- \neq \phi\} \cup \{C \cap \Pi \mid C \in M,\ C \cap \Pi \neq \phi\}$$

とおく．すなわち，$M(\Pi)$ を構成するには胞体的複体 M のひとつひとつの胞体 C について，$C \subset H_+$ または $C \subset H_-$ ならそのままにし，そうでないときには，C を $C \cap H_+$ $(=C_+)$，$C \cap H_-$ $(=C_-)$，$C \cap \Pi$ $(=C_0)$ という3つの胞体に分割するのである．$\dim C = i$ なら，$\dim C_+ = \dim C_- = i$，$\dim C_0 = i-1$．よって C が分割されれば，i 胞体の個数と $i-1$ 胞体の個数はともに1だけ増える．オイラー標数 $\alpha_0(M) - \alpha_1(M) + \cdots + (-1)^{i-1}\alpha_{i-1}(M) + (-1)^i\alpha_i(M) + \cdots$ は，それらの交代和（順次符号を $+, -$ とした和）だから，C の分割によって i 胞体の個数と $i-1$ 胞体の個数が同時に1だけ増えても変わらない．これは Π によって分割されるすべての胞体についていえることである．結局 $\chi(M(\Pi)) = \chi(M)$ がわかる．

さて $|K_1| = |K_2|$ $(\subset \boldsymbol{R}^n)$ と仮定して $\chi(K_1) = \chi(K_2)$ を示そう．$K_1 \cup K_2$ に含まれるすべての単体を並べて $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_k$ としておく（順序不同）．各 σ_i を含む超平面をひとつ選び Π_i とする．複体 K_1 を順次 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_k$ で切断すると，K_1 の細分であるような胞体的複体 $K_1{}^*$ を得る．上で示したように切断によりオイラー標数は不変だから $\chi(K_1) = \chi(K_1{}^*)$．また複体 K_2 を $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_k$ で切断して，胞体的複体 $K_2{}^*$ を得る．切断による不変性から $\chi(K_2) = \chi(K_2{}^*)$．ところが $K_1{}^*$ も $K_2{}^*$ も，K_1 と K_2 を‘重ね合わせた分割’（cf. §5.5 の共通細分の項）を，$\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_k$ で切断した細分と考えられるから，実は $K_1{}^* = K_2{}^*$ である．これで $\chi(K_1) = \chi(K_1{}^*) = \chi(K_2{}^*) = \chi(K_2)$ が証明できた．証明終り．

多面体 X について $X = |K|$ という複体 K がある．定理 5.3 によりオイラー標数 $\chi(K)$ は，このような分割 K のとり方によらない．この数を**多面体 X のオイラー標数**といい $\chi(X)$ で表わす．定理 5.3 の証明は胞体的複体についてもあてはまるから，$\chi(X)$ を，$X = |M|$ となる胞体的複体 M を使って計算することもできる．

【公式 1】 X, Y が多面体のとき $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$

実際，$X = |K|$，$Y = |L|$ のとき，$X \times Y$ は $M = \{\sigma \times \tau \mid \sigma \in K,\ \tau \in L\}$ という胞体的複体で分割されている．$\alpha_i(M) = \sum_{k+l=i} \alpha_k(K)\alpha_l(L)$ であるから，$\chi(M) = \sum_i (-1)^i \alpha_i(M) = \sum_{k,l} (-1)^{k+l}\alpha_k(K)\alpha_l(L) = (\sum_k (-1)^k \alpha_k(K))(\sum_l (-1)^l \alpha_l(L)) = \chi(K)\chi(L)$．

《公式1の例》 $I = [0,1]$（閉区間）とする．$\chi(I) = 1$，$\chi(I^2) = \chi(I)\chi(I) = 1$．$\chi(I^3) = \chi(I^2)\chi(I) = 1$，$\cdots$，$\chi(I^n) = \chi(I^{n-1})\chi(I) = 1$．

【公式 2】 X を多面体，p_0 は X に関し錐構成可能な位置にあるとする（cf. §5.4 のノート (1)）．錐 $p_0 * X$ は多面体であり，$\chi(p_0 * X) = 1$．

$X = |K|$ のとき $p_0 * X$ は錐複体 $p_0 * K$ の多面体である．$p_0 * K$ の頂点の個数 $\alpha_0(p_0 * K)$ は，$\alpha_0(K)$ に比べ p_0 の分だけ多い：$\alpha_0(p_0 * K) = \alpha_0(K) + 1$．また $i \geqq 1$ なら，$\alpha_i(p_0 * K)$ は K の i 単体の分と K の $(i-1)$ 単体 σ の錐 $p_0 * \sigma$ の分を数えて，$\alpha_i(p_0 * K) = \alpha_i(K)$

$+\alpha_{i-1}(K)$. これから

$$\begin{aligned}\chi(p_0 * K) &= \alpha_0(p_0 * K) - \alpha_1(p_0 * K) + \alpha_2(p_0 * K) - \cdots \\ &= (1 + \alpha_0(K)) - (\alpha_0(K) + \alpha_1(K)) + (\alpha_1(K) + \alpha_2(K)) - \cdots \\ &= 1.\end{aligned}$$

【公式 3】 X, Y が多面体なら，$X \cup Y$，$X \cap Y$ も多面体で，$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$

証明 $X = |K|$，$Y = |L|$ とする．$K \cup L$ に含まれるすべての単体を順不同に並べ $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ とし，各 σ_i を含む $\boldsymbol{R}^n$ の超平面 Π_i を選ぶ．($X \cup Y \subset \boldsymbol{R}^n$ と考えている．) K, L を $\Pi_1, \cdots, \Pi_k$ で順々に切断して得た胞体的複体を K^*, L^* とすれば，$K^* \cup L^*$，$K^* \cap L^*$ はそれぞれ $X \cup Y$，$X \cap Y$ の胞体的複体による分割を与えている．$K^* \cup L^*$ に含まれる $\boldsymbol{i}$ 単体の数を重複を除いて数えると，$\alpha_i(K^* \cup L^*) = \alpha_i(K^*) + \alpha_i(L^*) - \alpha_i(L^* \cap K^*)$ を得る．これから公式が出る．

【定理】（オイラー・ポアンカレ，アレクサンダー） 多面体 X と Y が位相同形なら $\chi(X) = \chi(Y)$ である．

いいかえれば，$\chi(X) \neq \chi(Y)$ なら X と Y は位相同形でないというのだから，この定理は X, Y が位相同形か否かを判定するときしばしば有効である．これを証明する余裕はないが，後で‘閉曲面’について，これが成り立っていることを観察することにしよう（§8.4，定理 8.5 の系 3）．

●談話室

4次元のサイコロ

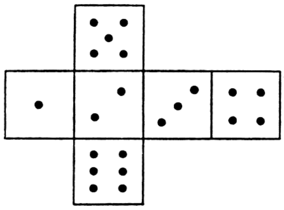


図 A　タロウのサイコロ

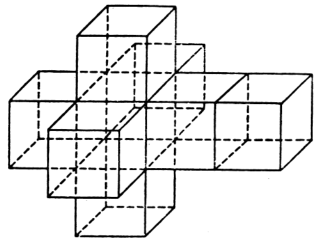


図 B　4次元のサイコロ

タロウ　きょう，図工の時間にサイコロをつくったよ．

おじさん　へえ，見せてごらん．おや，このサイコロは反対側の数を足しても7にならないんだね．

タロウ　おねえさんにも言われちゃった．

ハナ子　タロウったら，サイコロの展開図の上に素直に 1, 2, 3, … て並べちゃうんだもの．

おじさん　そうそう，サイコロで思い出したけど，昔‘4次元の小説’というのを読んだことがあるよ．それに4次元のサイコロみたいな話が出て来たの．あの本，残念だったなあ．買っておけばよかった．その時は本屋で全部立ち読みしたんだ．

ハナ子　どんな話なの？

おじさん　まず，ふつうのサイコロは（3次元の）立方体 $I^3=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ の表面だろう．I^3 の表面の展開図を描くと，それは図 A のような2次元の図形になるんだね．同じように，4次元の立方体 $I^4=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ の表面の‘展開図’を描くと3次元の図形になるんだけど，どんな図形になると思う．

タロウ　全然なんだかわかんないや．

ハナ子　やはり十字架みたいなの？

おじさん　まあ十字架みたいなものだけど，ちょっと違ってて図 B みたいなものになるよ．立方体が8つあるね．これを（4次元空間の中で）全部の面を適当にはりあわせると，4次元立方体の表面ができるわけ．

ある建築家がこの‘展開図’通りの家をつくったんだって．立方体の部屋が8つあるんだ．ところがその家が出来たあと震度 10 くらいのものすごい地震があって，ちょうどサイコロの展開図がサイコロになるように，この‘展開図’も4次元のサイコロにもどっちゃったというのさ．そしたら，どの部屋のどのドアを開けても隣の部屋で，とうとうその家から出られなくなっちゃったというの．これがその本にあった話．

第6章

PL 多様体入門

§6.1 PL トポロジー

PL 写像，PL 同形について説明しよう．まず準備として，2つの単体 $\sigma=|p_0p_1\cdots p_m|$，$\tau=|q_0q_1\cdots q_n|$ の間の線形写像 $f:\sigma\longrightarrow\tau$ とよばれるものを定義する．σ の任意の点 p は適当な実数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ によって $p=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i p_i$ $\left(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i=1,\ \lambda_0\geqq 0,\ \cdots,\ \lambda_m\geqq 0\right)$ という形に書けたことを思い出しておこう．

【定義】 $f:\sigma\longrightarrow\tau$ が**線形写像**であるとは，σ の任意の点 $p=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i p_i$ について，$f(p)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f(p_i)$ が成り立つことである．

$f:\sigma\longrightarrow\tau$ が線形写像なら，σ の頂点の行き先 $f(p_0),\cdots,f(p_m)$ が決められると，σ の任意の点 $p=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i p_i$

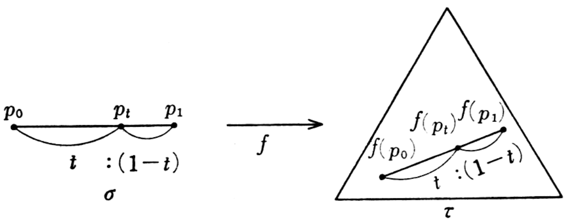


図 6.1 $f(p_0)\neq f(p_1)$ のとき
($f(p_0)=f(p_1)$ なら σの像は1点)

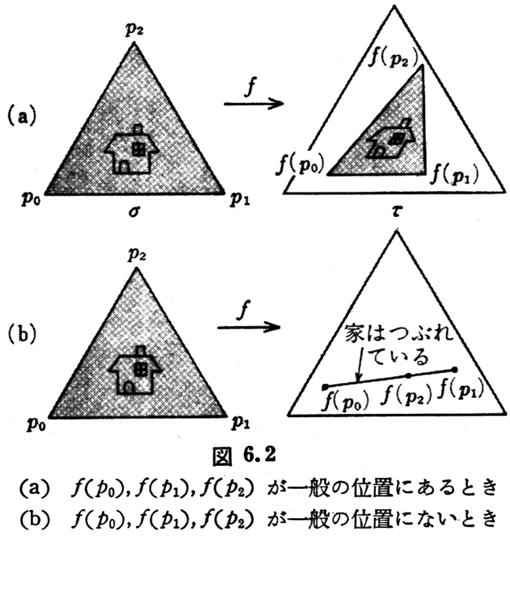


図 6.2
(a) $f(p_0),f(p_1),f(p_2)$ が一般の位置にあるとき
(b) $f(p_0),f(p_1),f(p_2)$ が一般の位置にないとき

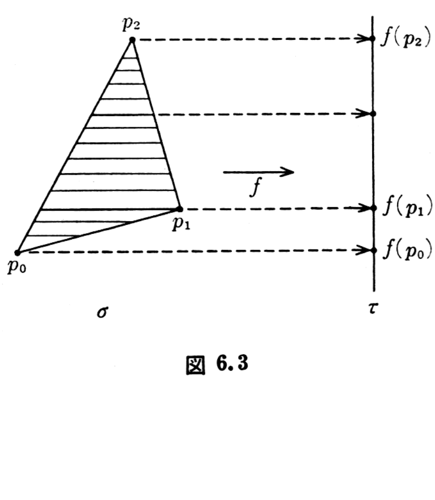


図 6.3

の行き先 $f(p)$ も自動的に決まってしまう．線形写像 $f:\sigma\longrightarrow\tau$ を，σ のどんな辺単体 ρ に制限しても $f|\rho:\rho\longrightarrow\tau$ はまた線形写像である．線形写像は明らかに連続である．例をあげると，

《例 1》 $\dim\sigma=1$, $\dim\tau=2$ の場合（図 6.1）．f は線分上の比を変えない．

《例 2》 $\dim\sigma=2$, $\dim\tau=2$ の場合（図 6.2）．

《例 3》 $\dim\sigma=2$, $\dim\tau=1$ の場合（図 6.3）．

X, Y を有限多面体とする．PL 写像 $f: X\longrightarrow Y$ とは線形写像を‘はり合わせて’得られる写像のことである．

【定義】 $f:X\longrightarrow Y$ が **PL 写像**であるとは，X, Y の有限複体による分割 K, L を適当に選べば，次の (1), (2) が満たされることをいう．

(1) K の任意の単体 σ について，$f(\sigma)\subset\tau$ となる L の単体 τ がある．

(2) f を σ に制限すると，$f|\sigma:\sigma\longrightarrow\tau$ は線形写像になる．

つまり PL 写像 $f:X\longrightarrow Y$ は，X を適当に単体分割すれば，単体ごとに線形になっている．PL とは piecewise linear（区分的に線形）を略した頭文字である．

線形写像は各単体上で連続であった．PL 写像はそれらを全体的に矛盾なくはり合わせたものだから，やはり連続写像である．

《例 1》 図 6.4 の f は PL 写像．

《例 2》 図 6.5 の f も PL 写像．

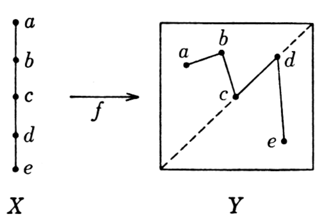


図 6.4

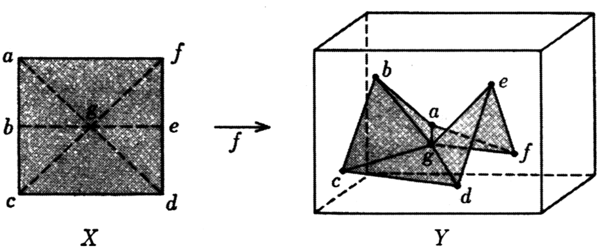


図 6.5

【定理 6.1】 $f:X\longrightarrow Y$, $g:Y\longrightarrow Z$ がともに PL 写像なら，合成写像 $g\circ f:X\longrightarrow Z$ も PL 写像である．

証明は，‘$f:|K|\longrightarrow|L|$ が PL 写像であって，K, L が PL 写像の定義の条件 (1), (2) を満たせば，K の任意の細分 K' についても，K', L は (1), (2) を満たす’という事実に基づいてなされる．証明には多少技術的な所もあるのであるが，話の本筋にはあまり関係ないから定理の事実だけ認めて先に進もう．証明については後のノートを参照してほしい．

【定義】 全単射であるような PL 写像 $f:X\longrightarrow Y$ を **PL 同形写像**とよぶ．

f は多面体という図形から図形への全単射である．点集合の間の写像として全単射なのである．

さて，PL 同形写像 $f:X\longrightarrow Y$ があるとどういうことがいえるのだろう．まず，PL 写像だから，PL 写像の条件 (1), (2) を満たす X, Y の単体分割 K, L がとれる．K の各単体 σ について，$f(\sigma)\subset\tau$ という L の単体 τ があって，$f|\sigma:\sigma\longrightarrow\tau$ は線形である．ところが，

上の仮定によって f は全単射，とくに $f|\sigma:\sigma\longrightarrow\tau$ は単射であり，σ が τ の中の，σ より低い次元の単体につぶれて写ることはない．よって $\dim f(\sigma)=\dim\sigma$（図 6.2 (a) の状況）．これから $\sigma=|p_0p_1\cdots p_m|$ なら $f(\sigma)=|f(p_0)f(p_1)\cdots f(p_m)|$ がわかる．

σ の任意の辺単体 $\rho=|p_{i(0)}p_{i(1)}\cdots p_{i(r)}|$ は，f によって $f(\sigma)$ の辺単体 $|f(p_{i(0)})f(p_{i(1)})\cdots f(p_{i(r)})|$ に写る．逆に，$f(\sigma)=|f(p_0)f(p_1)\cdots f(p_m)|$ の任意の辺単体 $|f(p_{i(0)})f(p_{i(1)})\cdots f(p_{i(r)})|$ は，σ の辺単体 $|p_{i(0)}p_{i(1)}\cdots p_{i(r)}|$ の像である．よって，$\rho<\sigma\Leftrightarrow f(\rho)<f(\sigma)$．それに f は全単射であるから $f(\sigma\cap\tau)=f(\sigma)\cap f(\tau)$．

これらの事実から，$f(K)=\{f(\sigma)\,|\,\sigma\in K\}$ とおくと $f(K)$ が複体になることがわかる．しかも K と $f(K)$ の単体は1対1にもれなく対応していて，$f(K)$ の複体としての構造は K の複体としての構造と全く同一である．（両者は‘同形’である．）f は仮定により全射であるから，$|f(K)|=Y$ である．こうして次の事実がわかった．

PL 同形写像 $f:X\longrightarrow Y$ があるとき，X と Y とは同形な単体分割 $K, f(K)$ をもつ．

とくに X, Y のオイラー標数を，これらの同形な単体分割を使って計算すれば当然等しくなるはずだから，PL 同形写像 $f:X\longrightarrow Y$ があれば，$\chi(X)=\chi(Y)$ となる．

さて，f は全単射だから逆写像 $f^{-1}:Y\longrightarrow X$ がある．f^{-1} を $f(K)$ の各単体 $f(\sigma)=|f(p_0)f(p_1)\cdots f(p_m)|$ に制限してみると，$f^{-1}\left(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f(p_i)\right)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i p_i$ になっている．（なぜなら $f:\sigma\longrightarrow f(\sigma)$ は全単射で，かつ $f\left(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i p_i\right)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f(p_i)$ だから．）すなわち $f^{-1}:Y\longrightarrow X$ も PL 写像になる．しかも全単射だから，逆写像 $f^{-1}:Y\longrightarrow X$ も PL 同形写像になる．とくに f, f^{-1} も連続写像であるから，PL 同形写像は同相写像である．

多面体 X と Y の間に PL 同形写像 $f:X\longrightarrow Y$ があるとき，X と Y とは互いに **PL 同形**である，ということにしよう．記号で $X\cong Y$ と書く．$f:X\longrightarrow Y$, $g:Y\longrightarrow Z$ がともに PL 同形写像なら，合成 $g\circ f:X\longrightarrow Z$ も PL 同形写像になることが（定理 6.1 を使って）わかる．したがって PL 同形について推移律：$X\cong Y, Y\cong Z\Longrightarrow X\cong Z$ が成り立つ．

《**例 1**》 2単体，すなわち3角形に PL 同形な多面体を **2 次元 PL 円板**とよぶ（図 6.6）．

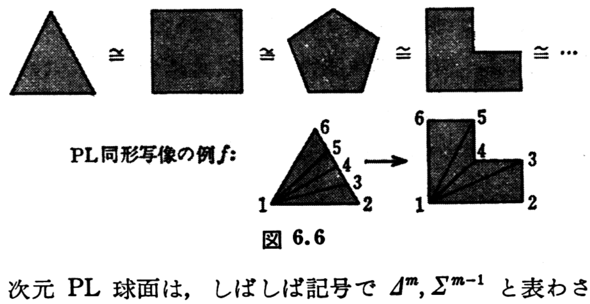


図 6.6

《**例 2**》 一般に m 単体 σ^m に PL 同形な多面体を **m 次元 PL 円板**とよぶ．σ^m の境界 $\partial\sigma^m$ に PL 同形な多面体を **$(m-1)$ 次元 PL 球面**という．m 次元 PL 円板，$(m-1)$ 次元 PL 球面は，しばしば記号で Δ^m, Σ^{m-1} と表わされる．（たとえば，図 6.6 の図形はすべて Δ^2 と表わす．）これらは PL 多様体を定義するための基本的材料である．

トポロジーは‘図形と連続写像’の世界（これを**位相カテゴリー**とよぼう）の研究であったが，その中に‘多面体と PL 写像’からなる部分的世界（部分カテゴリー）が構成された．こ

の部分カテゴリーを **PL カテゴリー**とよぶ．それを研究するのが **PL トポロジー**である．

●ノート．定理 6.1 の証明

X, Y の分割 K_1, L_1 を適当にとれば f, K_1, L_1 について PL 写像の条件 (1), (2) が満たされる．また Y, Z の分割 L_2, M_2 を適当にとれば g, L_2, M_2 についても条件 (1), (2) が満たされる．問題は，X, Z の分割 K^*, M^* を適当にとれば $g\circ f, K^*, M^*$ について PL 写像の条件 (1), (2) が成り立つか，ということである．

もし，上に現われた Y の2つの分割 L_1, L_2 について，L_1 が L_2 の細分になっていれば，$g\circ f, K_1, M_2$ について条件 (1), (2) が成り立つことがすぐわかる．一般にはそれが期待できないのがめんどうなところである．そのため $Y\subset \boldsymbol{R}^n$ と考え，L_2 のすべての単体を $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k$ とし，各 τ_i を含む $\boldsymbol{R}^n$ の超平面 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_k$ を選ぶ．そして $\Pi_1, \cdots, \Pi_k$ によって L_1 を切断して細分する．これに応じて K_1 の方も次のように細分する．

$\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_k$ を定義する $\boldsymbol{R}^n$ 上の線形関数を $h_1, h_2, \cdots, h_k$ とする．K_1 の単体 σ を任意にとる．$f: X \longrightarrow Y$ は σ 上では線形であるから，関数: $\sigma \ni p \longmapsto h_j(f(p)) \in \boldsymbol{R}$ は σ 上の線形関数になる．σ の中に $h_j(f(p))=0$ となる部分集合（σ の中の‘超平面’）を考え，これら（$j=1, 2, \cdots, k$）によって σ を分割すると，σ は胞体的複体に分割される．（ただし，σ 上で恒等的に0になったり，あるいは全く0にならない $h_j(f(p))$ は除外する．）この操作を K_1 のすべての単体について遂行すれば，K_1 の胞体による細分が得られる（図 6.7）．それをさらに単体的複体に細分したものを K^* とする．K^* のどの単体も f によって L_2 のどれかの単体の中に写されるから，f, K^*, L_2 について条件 (1), (2) が成り立つ．

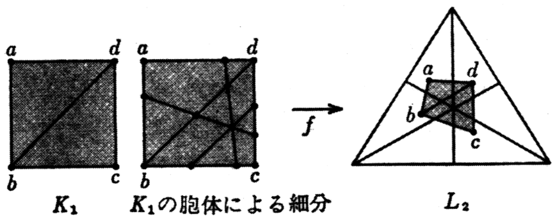


図 6.7

さて，そこで任意の $\sigma\in K^*$ について，‘$f(\sigma)\subset\tau$ かつ $f|\sigma:\sigma\longrightarrow\tau$ は線形’になるような $\tau\in L_2$ がとれる．また，この τ について ‘$g(\tau)\subset\rho$ かつ $g|\tau:\tau\longrightarrow\rho$ は線形’になるような $\rho\in M_2$ もある．すると，‘$g\circ f(\sigma)\subset\rho$ かつ $g\circ f|\sigma:\sigma\longrightarrow\rho$ は線形’となり，$g\circ f$, K^*, M_2 について条件 (1), (2) が満たされることになった．証明終り．

§6.2　PL 多様体

PL 多様体を定義する前に，複体の組み合わせ構造に付随した自然な概念を導入しておこう．

K を複体，x_0 を $|K|$ の1点とする．K の単体のうち，x_0 を含んでいるようなもの全部を集めて，複体 K の部分集合を作る．さらに，この部分集合を複体にするため，x_0 を含んでいる単体のすべての辺単体も寄せ集める．こうして作った K の部分複体を，K に関する x_0 の**星状複体**とよぶ．記号で，$\mathrm{Star}(x_0; K)$ と書く．ここに Star（星）が出てくる理由は

すぐ後でわかる．

念のため，$\sigma \in K$ が $\mathrm{Star}(x_0; K)$ に属するための必要十分条件をあげておこう．

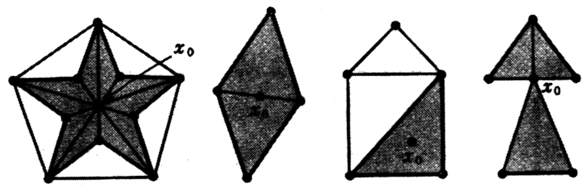
（i） $\sigma \ni x_0$ (i.e. σ は x_0 を含む)，または

（ii） σ は，$\tau \ni x_0$ という τ の辺単体．

この条件のいずれかである．

複体 $\mathrm{Star}(x_0; K)$ の多面体 $|\mathrm{Star}(x_0; K)|$ を K に関する x_0 の**星状多面体**という．

簡単な場合に $\mathrm{Star}(x_0; K)$ の図を描いてみよう (図 6.8)．最初の図が ‘Star’ の出てくる理由である．



x_0 が頂点のとき　x_0 は1単体の内点　x_0 は2単体の内点

図 6.8 $\mathrm{Star}(x_0; K)$ は灰色部分＋太線部．太線部は $\mathrm{Star}(x_0; K)$ に属すが，それ自身としては x_0 を含まぬ単体の集合．

図 6.8 の太線部のように，$\mathrm{Star}(x_0; K)$ に属してはいるが，‘それ自身としては x_0 を含まぬ単体’の集合を $\mathrm{Link}(x_0; K)$ と書く．これはまた複体になる．この複体 $\mathrm{Link}(x_0; K)$ は図 6.8 の太線のように，x_0 には触れずに x_0 のまわりを遠まきにして囲んでいる．そこで，この複体のことを，K に関する x_0 の**まつわり複体**と名づける．まつわり複体の多面体 $|\mathrm{Link}(x_0; K)|$ を**まつわり多面体**とよぶ．

図 6.8 からもわかるように x_0 は $|\mathrm{Link}(x_0; K)|$ に関して錐構成可能な位置にあり，その錐 $x_0 * |\mathrm{Link}(x_0; K)|$ が $|\mathrm{Star}(x_0; K)|$ にほかならない．(x_0 を含む単体ごとに確かめられる．) 初めから K がある複体 L の錐複体で，x_0 がその頂点の場合，すなわち $K = x_0 * L$ のとき，$\mathrm{Star}(x_0; K) = K$，$\mathrm{Link}(x_0; K) = L$ である．

以上で準備ができた．PL 多様体を定義しよう．簡単のため多面体はすべて有限とする．

【定義】 多面体 X が次の条件（$*$）を満たす単体分割 K をもつとき，X を **n 次元 PL 多様体**という．

（$*$） 任意の $x_0 \in X$ のまつわり多面体 $|\mathrm{Link}(x_0; K)|$ は $(n-1)$ 次元 PL 球面 Σ^{n-1} である．

実は，条件（$*$）を満たす単体分割 K がひとつでもあれば，X のすべての単体分割は（$*$）を満たすことが知られている．したがって，X が PL 多様体であるかないかは，適当な単体分割をひとつ定めて，それについて確かめればよいのである．これらのことの理論的根拠は次の定理である．

【定理 6.2】 K, L が多面体 X の2つの単体分割であれば，任意の $x_0 \in X$ について，$|\mathrm{Link}(x_0; K)| \cong |\mathrm{Link}(x_0; L)|$．

証明は後のノートにまわそう．次の系はしばしば有用である．

【系】 (Link の PL 不変性) $f: X \longrightarrow Y$ を多面体の間の PL 同形写像とすると，X, Y のどんな単体分割 K, L についても $|\mathrm{Link}(x_0; K)| \cong |\mathrm{Link}(f(x_0); L)|$ である ($x_0 \in X$)．

実際，PL 同形写像があれば，X, Y は同形な分割 $K_X, K_Y(=f(K_X))$ をもつ．これらに関する Link はもちろん PL 同形なはずである：$|\mathrm{Link}(x_0; K_X)| \cong |\mathrm{Link}(f(x_0); K_Y)|$．定理 6.2 によれば，Link の 'PL 同形類' は分割のとり方によらないから，$|\mathrm{Link}(x_0; K)| \cong |\mathrm{Link}(x_0; K_X)| \cong |\mathrm{Link}(f(x_0); K_Y)| \cong |\mathrm{Link}(f(x_0); L)|$．これで系が示せた．

この系から，$X \cong Y$ のとき，一方が n 次元 PL 多様体なら他方もそうであることがわかる．

《例 1》 2次元 PL 球面 Σ^2 は PL 多様体である．

Σ^2 は3単体の境界 $\partial\sigma^3$ に PL 同形な多面体を表わす．上の系で注意したことから，Σ^2 が2次元 PL 多様体であることをいうには，$\partial\sigma^3$ がそうであることを確かめればよい．$\partial\sigma^3$ は $K(\partial\sigma^3)$ により単体分割されている．図 6.9 から，点 $x_0 \in \partial\sigma^3$ がどこにあっても，$|\mathrm{Link}(x_0; K(\partial\sigma^3))| \cong \Sigma^1$．よって $\partial\sigma^3$ は2次元 PL 多様体である．

《例 2》 一般に PL 球面 Σ^m は m 次元 PL 多様体である．やはり，$K(\partial\sigma^{m+1})$ の組み合わせ構造に基づいて証明される．

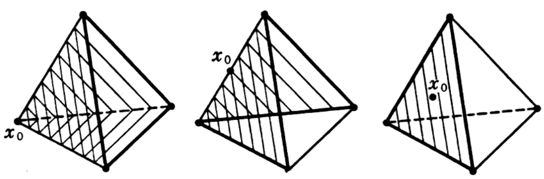


図 6.9　斜線は $\mathrm{Star}(x_0; K(\partial\sigma^3))$
太線は $\mathrm{Link}(x_0; K(\partial\sigma^3))$

PL 多様体の直積

X を m 次元 PL 多様体，Y を n 次元 PL 多様体とする．すると，

【定理 6.3】 直積 $X \times Y$ は $(m+n)$ 次元 PL 多様体になる．

証明には次の補助定理を使う．

【補助定理】 n 次元の立方体 I^n は n 次元 PL 円板 Δ^n である．ただし $I^n = [0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]$　(n 個)．

補助定理の証明　$I^n \cong \sigma^n$ を示せばよい．I^n の内部 $\mathrm{Int}(I^n)$ に1点 x_0 をとる．(内部については §5.4 のノート (2) 参照．) x_0 を内部に含む n 単体 σ^n を $\mathrm{Int}(I^n)$ の中に描く．x_0 は $\partial I^n, \partial\sigma^n$ に関して錐構成可能な位置にあり，$I^n = x_0 * \partial I^n$，$\sigma^n = x_0 * \partial\sigma^n$ となっている．任意の $x \in \partial\sigma^n$ について，x_0 を始点とする半直線 $\overrightarrow{x_0 x}$ は ∂I^n と1点 y で交わる．$f: \partial\sigma^n \longrightarrow \partial I^n$ を $f(x) = y$ と定義して，'x_0 に光源をおいた射影' とよぼう．後のノートで説明するように，この f は PL 写像ではないが，f を少し修正した '屈折した射影' $f': \partial\sigma^n \longrightarrow \partial I^n$ は PL 写像になる．しかも全単射だから PL 同形写像である．f' を錐に拡大して PL 同形写像 $(\sigma^n=)\, x_0 * \partial\sigma^n \longrightarrow x_0 * \partial I^n\,(=I^n)$ を得る．よって $I^n \cong \sigma^n$ となり I^n は n 次元 PL 円板である．('屈折した射影' については図 6.13 (b) を見られたい．)　証明終り．

定理 6.3 の証明　$X = |K|$，$Y = |L|$ とし，(x_0, y_0) を $X \times Y$ の任意の点とする．X, Y はそれぞれ m, n 次元 PL 多様体だから，$|\mathrm{Link}(x_0; K)| \cong \Sigma^{m-1}$，$|\mathrm{Link}(y_0; L)| \cong \Sigma^{n-1}$ である．

一般に，$(l-1)$ 次元 PL 球面 Σ^{l-1} の錐 $p_0 * \Sigma^{l-1}$ は l 次元 PL 円板 Δ^l であることに

注意しよう．(実際，σ^l の重心 p_σ を考えると，$\sigma^l = p_\sigma * \partial\sigma^l$.) すると，$|\mathrm{Star}(x_0;K)| = x_0 * |\mathrm{Link}(x_0;K)| \cong x_0 * \Sigma^{m-1} \cong \varDelta^m \cong I^m$ ($\varDelta^m \cong I^m$ は上の補助定理)．同様に $|\mathrm{Star}(y_0;L)| = y_0 * |\mathrm{Link}(y_0;L)| \cong y_0 * \Sigma^{n-1} \cong \varDelta^n \cong I^n$ (最後の $\varDelta^n \cong I^n$ は補助定理)．よって，$|\mathrm{Star}(x_0;K)| \times |\mathrm{Star}(y_0;L)| \cong I^m \times I^n = I^{m+n}$ がわかる．(A, B, A', B' が多面体で，$A \cong A'$, $B \cong B'$ なら $A \times B \cong A' \times B'$ となることは証明できる事実である．ここでは余裕がないので事実として認めることにしよう.) この同形によって，点 (x_0, y_0) は I^{m+n} の内部の点に写る．この点を p_1 とする．さらに補助定理により $I^{m+n} \cong \sigma^{m+n}$. この同形により，さらに p_1 は σ^{m+n} の内部の点 p_2 に写る．

Link の PL 不変性 (定理 6.2 の系) から，$|\mathrm{Star}(x_0;K)| \times |\mathrm{Star}(y_0;L)|$ の単体分割 M をとると，$|\mathrm{Link}((x_0,y_0);M)| \cong |\mathrm{Link}(p_2;K(\sigma))| = \partial\sigma^{m+n}$. 複体 M の適当な細分 T をとれば，それは $X \times Y$ のある単体分割 S の部分複体と考えられ，$|\mathrm{Link}((x_0,y_0);S)| \cong |\mathrm{Link}((x_0,y_0);T)| \cong |\mathrm{Link}((x_0,y_0);M)| \cong \partial\sigma^{m+n} \cong \Sigma^{m+n-1}$. したがって定義によって，$X \times Y$ は $m+n$ 次元 PL 多様体になる．証明終り．

《例》 $\Sigma^1 \times \Sigma^1$ は2次元 PL 多様体 (2次元 PL トーラス)．$\Sigma^2 \times \Sigma^2$ は4次元 PL 多様体である．

2次元 PLトーラスは §3.3 のトーラスに位相同形である．同じ記号 T^2 で表わすことにしよう．

境界をもつ多様体

3角形の周上の1点の Link を考えてみると Σ^1 にはならない．たとえば，$\sigma^2 = |p_0p_1p_2|$ に自然な単体分割 $K(\sigma) = \{|p_0p_1p_2|, |p_0p_1|, |p_0p_2|, |p_1p_2|, |p_0|, |p_1|, |p_2|\}$ を与え，$\mathrm{Link}(p_0;K(\sigma))$ を考える．すると $\mathrm{Link}(p_0;K(\sigma)) = \{|p_1p_2|, |p_1|, |p_2|\}$ となって，頂点 p_0 のまつわり多面体 $|\mathrm{Link}(p_0;K(\sigma))|$ は線分 $|p_1p_2|$ である．したがって3角形は前に定義した意味では2次元 PL 多様体ではない．同様の理由で，一般に m 次元 PL 円板 $\varDelta^m$ は m 次元 PL 多様体にならない．

しかし，m 次元 PL 円板 $\varDelta^m$ のような基本的対象が PL 多様体でないというのは不便である．そこで，PL 多様体の概念を少し拡張して，‘境界をもつ多様体’を定義しよう．

上の3角形 σ^2 の例を調べてみると，境界 $\partial\sigma$ 上のどの点においても，まつわり多面体は1単体に PL 同形 (すなわち $\varDelta^1$) である．また内部 $\mathrm{Int}(\sigma) = \sigma^2 - \partial\sigma$ の点では，まつわり多面体は Σ^1 になっている．まつわり多面体の不変性 (定理 6.2) によって，この事情は σ^2 の分割の仕方によらない (図 6.10)．同様な観察は任意の次元に拡張される．たとえば4面体 σ^3 では，$\partial\sigma^3$ の点のまつわり多面体は $\varDelta^2$ であり，$\mathrm{Int}(\sigma^3)$ の点のまつわり多面体は Σ^2 である．そこで，‘境界をもつ多様体’を次のように定義しよう．

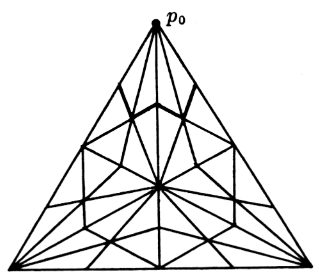


図 6.10 σ^2 を細かく分割したときの頂点 p_0 の $\mathrm{Link} \cong \varDelta^1$

【定義】 多面体 X が次の条件 (＊) を満たす単体分割 K をもつとき，X を**境界をもつ n**

次元 PL 多様体という．

（＊） 任意の $x_0 \in X$ のまつわり多面体 $|\mathrm{Link}(x_0 ; K)|$ は Σ^{n-1} であるかまたは Δ^{n-1} である．

このように定義すると，3角形は境界をもつ2次元 PL 多様体になる．

$|\mathrm{Link}(x_0 ; K)| \cong \Sigma^{n-1}$ であるような x_0 を X の**内点**，また，$|\mathrm{Link}(x_0 ; K)| \cong \Delta^{n-1}$ であるような x_0 を X の**境界点**という．まつわり多面体の不変性（定理 6.2）によって，点 $x_0 \in X$ が内点であるか境界点であるかは，X の分割 K のとり方によらない．内点の全体を $\mathrm{Int}(X)$，境界点の全体を ∂X と書いて，それぞれ**内部** (interior)，**境界** (boundary) とよぶ．証明は略すが，∂X は X の部分多面体になることが知られている．（すなわち，X の単体分割 K とその部分複体 L とを適当にとれば $\partial X = |L|$ となる．）

まつわり多面体の PL 不変性（定理 6.2 の系）から，$f: X \longrightarrow Y$ が PL 同形写像のとき，X, Y の一方が境界をもつ多様体なら，他方もそうであって，しかも $f(\mathrm{Int}(X)) = \mathrm{Int}(Y)$，$f(\partial X) = \partial Y$ が成り立つ．

単体や胞体は境界をもつ多様体になっている．胞体としての $\mathrm{Int}(C), \partial C$ は，それぞれ多様体としての内部，境界に一致する．

‘境界をもつ多様体’という場合，暗黙のうちに $\partial X \neq \phi$ を仮定している．$\partial X = \phi$ なら，前に定義した PL 多様体にほかならない．それを‘境界をもつ’場合と区別して，**境界のない多様体**とか**閉多様体**とかよぶことにする．境界をもつもの，もたないものを総称して単に‘多様体’ということもある．

注意　閉多様体の正式の定義は ① $\partial X = \phi$ しかも ② X: コンパクト，であるが，我々は初めから有限多面体に話を限っているので第2の条件はつねに満たされている．

《例》 m 次元 PL 円板 Δ^m は定義によって $\Delta^m \cong \sigma^m$．σ^m が境界をもつ m 次元 PL 多様体であるから Δ^m もそうである．また多様体 Δ^m の境界 $\partial \Delta^m$ は $\partial \sigma^m$ と PL 同形であるから，Σ^{m-1} である．

【定理 6.4】 X が境界をもつ n 次元 PL 多様体なら，境界 ∂X は $(n-1)$ 次元 PL 閉多様体である．

証明のアウトライン　前に注意したように，実は ∂X は X の部分多面体になる．したがって，複体 K と K の部分複体 L があって，$X = |K|$，$\partial X = |L|$ となる．点 x_0 を ∂X の任意の点とすると，次の等式が確かめられ，∂X は $(n-1)$ 次元 PL 多様体になる: $|\mathrm{Link}(x_0 ; L)| = \partial X \cap |\mathrm{Link}(x_0 ; K)| = \partial X \cap \Delta^{n-1} = \partial \Delta^{n-1} = \Sigma^{n-2}$．（第1と第3の等号だけが自明でない部分．）

【定理 6.5】 X, Y が境界をもつ m, n 次元 PL 多様体なら，直積 $X \times Y$ は境界をもつ $(m+n)$ 次元 PL 多様体であり，$\partial(X \times Y) = ((\partial X) \times Y) \cup (X \times \partial Y)$．そして $((\partial X) \times Y) \cap (X \times \partial Y) = (\partial X) \times (\partial Y)$ である．

《例 1》 $\Delta^1 \times \Delta^1$ は（境界をもつ）2次元多様体．$\partial(\Delta^1 \times \Delta^1) = ((\partial \Delta^1) \times \Delta^1) \cup (\Delta^1 \times \partial \Delta^1)$（図 6.11）．

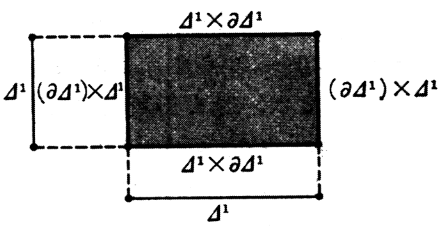


図 6.11

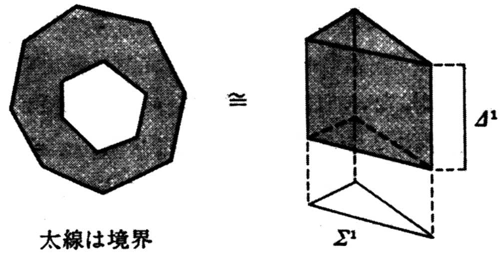


図 6.12 アニュラス

《例 2》 2次元多様体 $\Delta^1 \times \Sigma^1$ およびそれに PL 同形な多様体を**アニュラス** (annulus) という．境界は $(\partial\Delta^1) \times \Sigma^1$ である．(一般に定理 6.5 の公式で X, Y の一方，たとえば Y が閉多様体なら $\partial(X \times Y) = (\partial X) \times Y$ となる．$\partial Y = \phi$ だから．)

《例 3》 $\Delta^2 \times \Sigma^1$ は境界をもつ3次元 PL 多様体．境界は $(\partial\Delta^2) \times \Sigma^1 = \Sigma^1 \times \Sigma^1$ (PL トーラス)．$\Delta^2 \times \Sigma^1$ およびそれに PL 同形な3次元多様体を**中身のつまったトーラス** (solid torus) という．これはドーナツである．

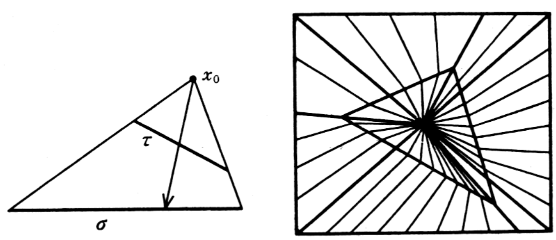
定理 6.5 の証明は省略する．

●ノート．定理 6.2 の証明

記号は定理 6.2 の主張と同じとする．共通細分の定理 (§5.5 定理 5.2) によれば，K と L とは共通細分をもつ．よって，初めから L が K の細分であると仮定して定理 6.2 を示せば十分である．

L が K の細分ならば，$|\mathrm{Star}(x_0; L)| \subset |\mathrm{Star}(x_0; K)|$ は明らか．両方の Star とも x_0 を頂点とし，Link を底とする錐の構造をもっている．そこで頂点 x_0 に‘光源’をおいた射影によって $|\mathrm{Link}(x_0; L)| \cong |\mathrm{Link}(x_0; K)|$ を示そうというのが証明のアイデアである．2つの技術的議論が必要である．

① x_0 に光源をおいた射影によって，$\mathrm{Link}(x_0; L)$ の各単体が $\mathrm{Link}(x_0; K)$ のあるひとつの単体 σ の中に写されてほしい (PL 写像の条件 (1))．そのためには任意の $\tau \in \mathrm{Link}(x_0; L)$ について，$\tau \subset x_0 * \sigma$ となる $\sigma \in \mathrm{Link}(x_0; K)$ が見出せればよいが，一般にはこうなっていない．そこで，$x_0 * \sigma$ という形の単体を含むすべての超平面によって $\mathrm{Link}(x_0; L)$ を切断する．($|\mathrm{Star}(x_0; K)| \subset \boldsymbol{R}^n$ と考え，$\boldsymbol{R}^n$ の超平面のことを言っている．) 得られた細分はたぶん胞体的であるが，さらに単体的複体にまで細分する．これを $\mathrm{Link}(x_0; L)^*$ と書こう．こうすると，任意の $\tau \in \mathrm{Link}(x_0; L)^*$ について $\tau \subset x_0 * \sigma$ という $\sigma \in \mathrm{Link}(x_0; K)$ が見出せることになる．



(a) 単なる射影は線形でない (中点が中点に写らない)　(b) 屈折した射影 f'

図 6.13

② x_0 に光源をおく射影 f を，各単体 $\tau \in \mathrm{Link}(x_0; L)^*$ に制限し

た写像が，線形写像 $\tau \longrightarrow \sigma$ になっていれば，f は全単射な（これも厳密に言えば証明が要るが）PL 写像だから，PL 同形写像ということになる．ところが一般に射影 f は各単体上で線形ではない．(間違えやすいので standard mistake という．cf. 図 6.13 (a)) そこで f を各単体 τ 上，次の f' に修正する．$\tau = |p_0 p_1 \cdots p_r|$ のとき，$f'(p_i) = f(p_i)$ と定め，$f'\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i\right) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i f(p_i)$ とおく．こう定義すると，$f'(\tau) = f(\tau)$，しかも τ 上で線形になる．$f' : |\mathrm{Link}(x_0; L)^*| \longrightarrow |\mathrm{Link}(x_0; K)|$ が PL 同形写像になることはすぐにわかる．(f' を'屈折した射影'とよぼう．図 6.13 (b) 参照) これで $|\mathrm{Link}(x_0; L)| \cong |\mathrm{Link}(x_0; L)^*| \cong |\mathrm{Link}(x_0; K)|$ が示せた．証明終り．

§6.3　三角形分割と基本予想

X を（境界のない）n 次元 PL 多様体とする．x_0 をその任意の 1 点とすれば，前節で説明したように $|\mathrm{Star}(x_0; K)|$ は n 次元 PL 円板になる．(cf. 定理 6.3 の補助定理の証明．ここで K は X の任意の単体分割．) しかも，PL 同形写像 $|\mathrm{Star}(x_0; K)| \longrightarrow \sigma^n$ により x_0 は σ^n の内点に写り，$|\mathrm{Link}(x_0; K)|$ は $\partial\sigma^n$ に写る．$U = |\mathrm{Star}(x_0; K)| - |\mathrm{Link}(x_0; K)|$ とおくと，U は x_0 を含む X の開集合で，$U \approx \sigma^n - \partial\sigma^n \approx D^n - S^{n-1} = O^n \approx \boldsymbol{R}^n$．したがって，$X$ は第 3 章で定義した意味での多様体になっている．

第 3 章の多様体を PL 多様体と区別して**位相多様体**とよぶ．上の議論から次の定理を得る．

【定理 6.6】 n 次元 PL 多様体は n 次元位相多様体である．

この定理の逆を考えてみよう．すなわち，"任意の n 次元位相多様体はある n 次元 PL 多様体と位相同形になるだろうか？" という問題である．これは位相多様体の**三角形分割問題**とよばれ，昔から有名な難問であった．

与えられた位相多様体の次元 n によって難しさが違う．

$n=1$ ならコンパクトで弧状連結な 1 次元位相多様体はすべて $\partial\sigma^2$（3 角形の周）に位相同形なことが知られており，この問題はほぼアタリマエ (cf. 加藤 [11])．$n=2$ になるともうアタリマエとは言えない．それは 1920 年代にラド (T. Radó) によって肯定的に証明された (再び cf. 加藤 [11])．$n=3$ ならかなり難しい．この場合は，1952 年モイズ (E. Moise) がやはり肯定的に解いた．

残ったのは $n \geqq 4$ の場合である．証明の困難は飛躍的に増大し，その解決は絶望的に思われていた．ところが，1968 年〜69 年にかけてのカービー (R. Kirby) とジーベンマン (L. Siebenmann) の共同研究が事態を一変させた．彼らは 5 次元以上の多様体について，三角形分割問題と後に述べる基本予想とを一挙に，しかも決定的に解決してしまったのである．彼らによれば三角形分割問題にも基本予想にも，高次元多様体で反例がある．そしてどんな多様体について肯定的であるか，どんな多様体について否定的であるか，原理的には完全にわかるというのである．

彼らの仕事は当時世界中に大センセーションを巻き起こした．トポロジーに関心を抱くすべ

ての人に強いショックを与えたことは言うまでもない．

ところで，彼らの理論には少し奇妙なところがあった．それは5次元以上の多様体に関する理論でありながら，ロホリンの定理とよばれる4次元の定理（cf. 第10章）に本質的にかかわりをもっている点である．位相多様体と PL 多様体に関する理論が，4次元という特殊な次元の現象に拘束されているように見えるのである．さらに奇妙なことは，肝心な4次元多様体については三角形分割問題も基本予想もいまだに解決されていない，という事情である．ここに何かがある！　と感じられないであろうか．（我々の住む現実の時空もやはりどういうわけか4次元である．これは単なる偶然なのだろうか．）4次元の世界はわからないことばかりであるが，最近次第にいろいろな知識が集積し，その特殊な様相が姿を現わしつつあるようである．これらのことについては巻末の座談会で触れておいた．

基本予想

三角形分割問題が位相多様体上の‘PL 構造’の存在を問う問題であるとすれば，基本予想はその一意性を問う問題である．すなわち，“多面体 X と Y が位相同形ならば，両者は PL 同形であろうか？”という問題がそれである．これは E. Steinitz によって初めて明確に述べられた（1907）．トポロジーの歴史の初期において，単体分割のような‘組み合わせ構造’に基づいて，オイラー標数，ベッチ数，等の代数的不変量が定義されたが（たとえば 19 世紀末，H. ポアンカレの研究等），そのような組み合わせ的方法と，連続写像，位相同形等を直接扱おうとする研究方法との差異を問う，という問題意識があったのであろう．

X, Y ともに PL 多様体のとき，$\dim=1$ なら自明である．$\dim=2$ ならケレキャルト（Kerékjárto）（1923），$\dim=3$ ならモイズ（1952）により肯定的に証明された．（$\dim=2$ の場合は第8章の §8.4 でも証明される．）

X, Y を多様体に限らず，一般の多面体とすれば，1961 年ミルナー（J. Milnor）により，6次元以上のすべての次元で反例が見出された．

4次元以上の PL 多様体についての基本予想が残された問題として人々の注目を集めたが，前述のようにカービーとジーベンマンにより，1969 年ほぼ決定的な解決を見たわけである（ただし5次元以上）．

§6.4　閉曲面の分類

境界のない2次元 PL 多様体を**閉曲面**とよぶ．球面 Σ^2 やトーラス $\Sigma^1\times\Sigma^1$ などがその例である．この § ですべての弧状連結な閉曲面を PL 同形によって分類しよう．これはトポロジーの古典的な結果である．

ここで閉曲面の分類を改めて取り上げるのは，それが基本予想のモデルケースになるからであり，また2次元のトポロジーは4次元のトポロジーに似通った点も少くないからである．この § はやさしいが少し長い．

分類にあたって次の簡単な補助定理が役立つ．用語の経済のため PL 円板を単に円板，PL 球面を単に球面とよぶ．

【補助定理 A】 $\varDelta, \varDelta'$ を2つの2次元円板とする．境界の間の任意の PL 同形写像 $f:\partial\varDelta \longrightarrow \partial\varDelta'$ は PL 同形写像 $F:\varDelta \longrightarrow \varDelta'$ に拡張できる．

【補助定理 B】 1次元 PL 円板を簡単に PL 弧とよぼう．2つの2次元円板 $\varDelta_{(1)}, \varDelta_{(2)}$ がそれらの境界上の PL 弧で交わっているなら，$\varDelta_{(1)} \cup \varDelta_{(2)}$ も2次元円板である．

補助定理 A の証明　$\varDelta, \varDelta'$ がともに2単体 σ なら簡単である．p_σ を σ の重心とすると $\sigma = p_\sigma * \partial\sigma$．この錐構造を利用して，任意の PL 同形写像 $h:\partial\sigma \longrightarrow \partial\sigma$ が PL 同形写像 $H:\sigma \longrightarrow \sigma$ に拡張できる（cf. §5.4 のノート (1) の補助定理）．一般の場合 $\varDelta, \varDelta'$ は2次元円板だから，PL 同形写像 $g_1:\varDelta \longrightarrow \sigma$，$g_2:\varDelta' \longrightarrow \sigma$ がある．$f:\partial\varDelta \longrightarrow \partial\varDelta'$ を与えられた PL 同形写像とし，$h:\partial\sigma \longrightarrow \partial\sigma$ を $h(x) = g_2 \circ f \circ g_1^{-1}(x)$ $(x \in \partial\sigma)$ と定義しよう．h は2単体の周の間の PL 同形写像であるから，上の注意によって，PL 同形写像 $H:\sigma \longrightarrow \sigma$ に拡張される．$F:\varDelta \longrightarrow \varDelta'$ を $F(x) = g_2^{-1} \circ H \circ g_1(x)$ と定義すると，F は PL 同形写像であって，しかも $F|\partial\varDelta = g_2^{-1} \circ H \circ (g_1|\partial\varDelta) = g_2^{-1} \circ (H|\partial\sigma) \circ (g_1|\partial\varDelta) = g_2^{-1} \circ h \circ (g_1|\partial\varDelta) = g_2^{-1} \circ g_2 \circ f \circ g_1^{-1} \circ (g_1|\partial\varDelta) = f$．よって F は求める拡張である．この証明からわかるように，2次元であることはこの場合本質的でない．補助定理 A は何次元の円板についても成り立つ定理である．

補助定理 B の証明　$\varDelta_{(1)} \cap \varDelta_{(2)} = \partial\varDelta_{(1)} \cap \partial\varDelta_{(2)} = J$ とする．仮定により $J \cong \sigma^1$ である．一般に Σ^1 の中に PL 弧 J があるとき，$\Sigma^1 - \mathrm{Int}(J)$ はまた PL 弧になることを注意しておく．

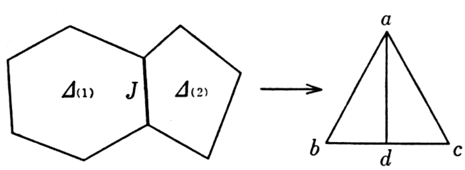


図 6.14

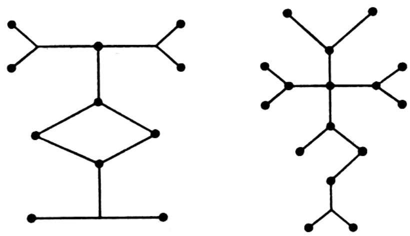
さて，図 6.14 のような3角形 $|abc|$ を考える．辺 $|bc|$ の中点を d とする．共通部分 $J = \varDelta_{(1)} \cap \varDelta_{(2)}$ は PL 弧であるから，J から線分 $|ad|$ への PL 同形写像 $h:J \longrightarrow |ad|$ がある．$\partial\varDelta_{(1)} - \mathrm{Int}(J)$ はまた PL 弧だから，J の両端 ∂J での写像 $h|\partial J:\partial J \longrightarrow \{a, d\}$ を PL 同形写像 $h_{(1)}:(\partial\varDelta_{(1)} - \mathrm{Int}(J)) \longrightarrow$（折れ線 abd）に拡張できる．$\partial\varDelta_{(2)} - \mathrm{Int}(J)$ も PL 弧であるから $h|\partial J:\partial J \longrightarrow \{a, d\}$ を PL 同形写像 $h_{(2)}:(\partial\varDelta_{(2)} - \mathrm{Int}(J)) \longrightarrow$（折れ線 acd）に拡張できる．2つの写像 $h, h_{(1)}$ を合わせて，PL 同形写像 $f_{(1)}:\partial\varDelta_{(1)} \longrightarrow \partial|abd|$ を得る．同様に $h, h_{(2)}$ を合わせて，PL 同形写像 $f_{(2)}:\partial\varDelta_{(2)} \longrightarrow \partial|acd|$ を得る．補助定理 A によれば，$f_{(1)}, f_{(2)}$ は PL 同形写像 $F_{(1)}:\varDelta_{(1)} \longrightarrow |abd|$，$F_{(2)}:\varDelta_{(2)} \longrightarrow |acd|$ に拡張される．$F_{(1)}, F_{(2)}$ は共通部分 J 上では，始めの $h:J \longrightarrow |ad|$ に一致している．よって $F_{(1)}, F_{(2)}$ を合わせて PL 同形写像 $F:\varDelta_{(1)} \cup \varDelta_{(2)} \longrightarrow |abd| \cup |acd| = |abc|$ が得られる．

さて弧状連結な閉曲面の分類であるが，何段階かに分けて行なうことにしよう．

以後，多面体について弧状連結のことを単に連結ということにする．

ステップ 1　1次元複体 T が**樹木**（tree）であるとは，その多面体 $|T|$ が連結であって，

しかも閉じたループを含まないことである（図 6.15）．X を任意の連結な閉曲面，K をそのひとつの単体分割とする．そのとき，樹木であるような K の1次元部分複体のうち，K の頂点をすべて含むものが存在する．これをひとつの**極大樹木**とよぶ．



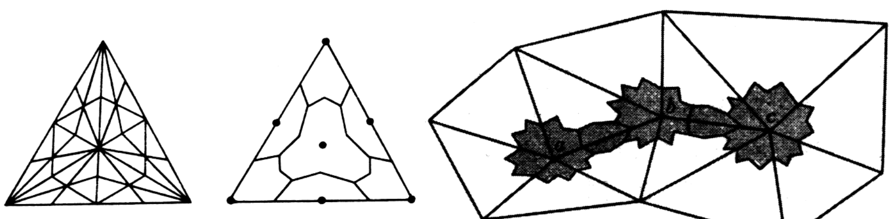
樹木でない　　樹木

図 6.15

実際，T を K の任意の樹木（であるような部分複体）とする．もし，T に含まれない K の頂点 p_0 があれば，p_0 から出発して次々に K の1単体をたどっていって，T の頂点に達し得る．この1単体の系列 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ のうち初めて T と共通部分をもつものを σ_k とすれば，σ_k の一端は T の頂点で他端は T の頂点でない．この σ_k とその端点を T につけ加えることにより，T は樹木の性質を保ったまま拡大される．T に含まれない K の頂点がある限りこの拡大は続けられる．K の頂点の個数は有限だから，遂には求める極大樹木に達するはずである．

ステップ 2

【定義】 一般に K を複体，L をその部分複体とし，K を2回続けて重心細分した K'' を考える．L の単体 σ の重心 p_σ の K'' における星状多面体 $|\mathrm{Star}(p_\sigma; K'')|$ を L のすべての単体にわたって寄せ集めたもの，すなわち $\bigcup_{\sigma \in L} |\mathrm{Star}(p_\sigma; K'')|$ を，L の K における**導近傍**とよび $N(L; K)$ と書く．



(a)　(b)　(c)

図 6.16

導近傍の様子を2次元の中で見てみよう．図 6.16 (a) は3角形の2回重心細分である．(b) は初めの3角形の各辺単体の重心について，この2回重心細分に関する星状多面体を求めたもの．ひとつの3角形の中での様子がはっきりすると，一般の導近傍の様子がわかる．(c) は折れ線 abc の導近傍を求めたものである．

さて，閉曲面 X とその単体分割 K にもどろう．ステップ1によれば K は極大樹木 T を含んでいる．T の K における導近傍 $N(T; K)$ を考える．T のひとつの頂点から出発して次々と1単体をたどっていくのだが，このとき導近傍ができていく様子は図 6.16 (c) と同じ．つまり，次々に2次元円板がくっついていく．しかも，円板同士は必ずその境界上の PL 弧でくっつくことがわかる．T は樹木だから，この操作は分岐することはあっても，もとの頂点にもどってくることはない．そこで，始めの頂点に対応する円板から出発して，補助定理 B を次々に適用していくことができる．結局 $N(T; K)$ は2次元円板になることがわかっ

た.

ステップ 3　$D=N(T;K)$ とおこう. 閉曲面 X から円板 D の内部 $\mathrm{Int}(D)$ を除いた残りの部分 Y は, 境界をもつ2次元 PL 多様体である. $\partial Y=\partial D=\Sigma^1$ である. Y の構造を調べよう.

まず, Y は連結である. 証明: Y の2点 p, q を任意にとると, X は連結だったから p と q は X の中の曲線 l で結べる. l が円板 D に交わらなければ $l\subset Y$ であるから, p と q は Y の曲線で結べることになる. もし l が D に交われば, 初めて D に到達する点を p_1, Dと最後に交わる点を p_2 とする. p_1, p_2 は ∂D 上にあるはずである. ∂D は連結だから, p_1 と p_2 は ∂D 上の曲線で結べる. l の p から p_1 までの部分, ∂D 上の曲線, そして l の p_2 から q までの部分, の3つをつないで, p と q を結ぶ Y の曲線を得る. これで証明できた.

図 6.17 で見るように, Y はたくさんの円板をはり合わせて構成されている. それらは2種類に分かれる. ひとつは K の2単体の重心の Star (これを**国**とよぼう). もうひとつは K の1単体の重心の Star (これを**橋**とよぶ) である.

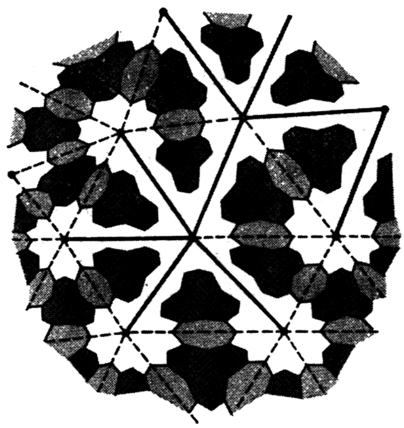


図 6.17　太い実線　極大樹木 T
白い部分　$D=N(T;K)$
濃い部分 '国'
薄い部分 '橋'　} Y

国と国とが直接接し合うことはなく, 必ず橋を介してつながっている. '橋' といっても長さより幅の方が広い橋だが, とにかくひとつの橋は2つの国を結んでいる. また, Y は連結だからひとつの国が孤立することなく, 順々に橋を渡っていけば, どの国からどの国にも行ける.

さて, ひとつの国から出発し, 橋でつながった隣国を次々に征服していく操作を考えよう. すなわち2つの国 C_1, C_2 が橋 b_1 でつながっているとき, C_1 を $C_1\cup b_1\cup C_2$ という和集合に拡大するのである. $C_1\cap b_1$, $b_1\cap C_2$ ともに PL 弧であるから, 補助定理 B を2度使うことにより $C_1\cup b_1\cup C_2$ も2次元円板であることがわかる. '領土' を拡大した国が2次元円板である限りこの拡大の操作を続けていく. すると, これ以上領土を拡張するともはや2次元円板ではなくなるような極大の国 C に達するであろう.

C は初めにあったすべての国を含んでいることを証明しよう. もし, 初めにあった国 C_i で C に含まれていないものがあれば, C_i にかかる橋から出発して次々に国と橋とを通っていくと, ついに C に併合されている国 C_j に達する. C_j の直前の国 C_k はまだ C に併合されていない. C_j と C_k との間の橋を b_l とすると, C は $C\cup b_l\cup C_k$ に拡大され, また2次元円板になってしまう (補助定理 B). これは C が極大であったことに反する.

このように，C はすべての国を含んでいるから，Y を構成する円板のうち，C に含まれていないのはいくつかの橋だけである．

ここで便宜上，次のような言葉を導入しておこう．いま，ある多面体 b が，正方形 $[0,1]\times[0,1]$ に PL 同形なとき，**バンド**とよぶことにする．正方形の両サイド（$\{0\}\times[0,1])\cup(\{1\}\times[0,1]$）にあたる b の部分を b の**両はし**とよぶ．b の両はしは2つの PL 弧である．

'すべての国を併合した極大の円板 C' に属していない橋 b_i を考える．b_i は明らかにバンドであって，その両はしで C にくっついている．両はしは ∂C 上の2つの PL 弧である．

これで Y の構造がよくわかった．Y は $Y=C\cup b_1\cup b_2\cup\cdots\cup b_r$ と書けている．($b_1, b_2, \cdots, b_r$ は C に属さぬ橋に適当な番号をつけたもの．）ここに C は2次元円板であり，b_i はバンドである．b_i の両はしは ∂C 上の2つの PL 弧であって，そこで b_i は C にくっついている．また $i\neq j$ なら $b_i\cap b_j=\phi$ である．橋の長さをギューッとひきのばして変形して描けば，図 6.18 のような図になる．Y はこのようなものに PL 同形である．

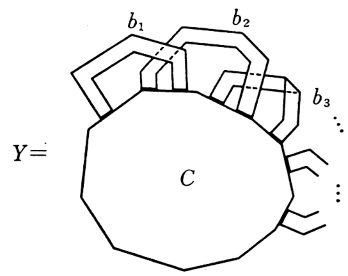


図 6.18 （太い線はバンドの両はし）

図 6.18 にはひねったバンド（図 6.18 の b_3）も出てきている．一般には，C が 'ねじれて' Y の中に入っているため，このような現象が起き得るのである．

2回ひねったバンドは全くひねらないものと PL 同形である（図 6.19）．我々の3次元空間では2回ひねりのバンドと全くひねらないものとを重ね合わせることはできないが，それにもかかわらず両者は互いに PL 同形なのである．一般に，偶数回ひねったものはひねらないものと PL 同形である．また，奇数回ひねったものは1回ひねったものと PL 同形となる．ひねりが偶数回，奇数回のバンドをそれぞれ**ひねっていないバンド**，**ひねったバンド**とよぶことにする．（本書での '1回ひねり' は通常は '半回ひねり' と言われているものである．）

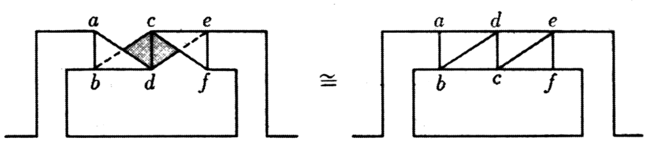


図 6.19

ステップ 4 Y のような多面体を**バンドつき円板**とよぼう．バンドつき円板の分類を考える．$\partial Y\cong\Sigma^1$ は仮定しておく．

（I） ひねったバンドのある場合

b_1 をひねったバンドとする．円板 C に b_1 だけをとりつけたものを考えよう．$C\cup b_1$ は**メビウスの帯**とよばれる2次元多様体で，$\partial(C\cup b_1)\cong\Sigma^1$ である．∂C 上に，b_1 の両はしを含まない PL 弧 J をとる．他のバンド $b_2, b_3\cdots$ は $\partial(C\cup b_1)$ にくっついているが，それらの両はしを $\partial(C\cup b_1)$ の上で '滑らせて' いって，すべて J の中に入れることができる（図 6.20 (a)）．$b_2, b_3, \cdots$ は J の所で $C\cup b_1$ にくっついているとしてよい．図 6.20 (b) のように，円板 C を PL 弧 J' で2つの円板 C_1, C_2 に分けると，Y はメビウスの帯 $C_1\cup b_1$ とバンドつき円板 $C_2\cup b_2\cup b_3\cdots$ とを PL 弧 J' に沿ってはり合わせたものと考えられ

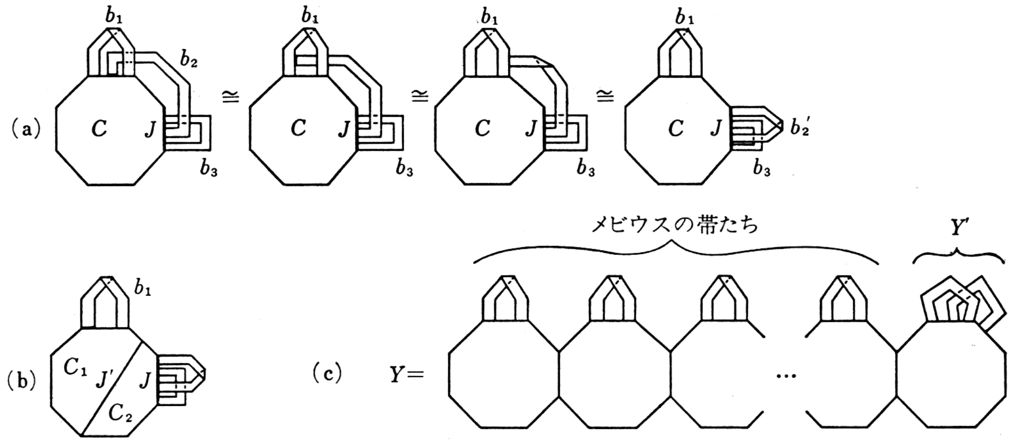


図 6.20

る．こうすれば，ひねったバンドはすべてメビウスの帯として分離できる．結局 Y は図 6.20 (c) のように分解し，Y' にはもはやひねったバンドが含まれていないと考えてよい．

$\partial Y \cong \Sigma^1$，また，メビウスの帯の境界も Σ^1 であるから $\partial Y' \cong \Sigma^1$ でなければならない．

(II)　ひねったバンドがない場合

C につくすべてのバンド $b_1, b_2, \cdots, b_r$ は‘ひねっていないバンド’であるとする．$C \cup b_1$ はアニュラス（図 6.12）である．境界 $\partial(C \cup b_1) \cong \Sigma^1 \cup \Sigma^1$ であって連結でない．ところが，仮定より $\partial(C \cup b_1 \cup b_2 \cup \cdots \cup b_r) \cong \Sigma^1$ は連結である．よって $b_2, b_3, \cdots, b_r$ の少くともひとつのバンドは，一方のはしで $\partial(C \cup b_1) \cong \Sigma^1 \cup \Sigma^1$ の一方の Σ^1 につき，他方のはしで他方の Σ^1 についている．それを b_2 とする．図 6.21 は $C \cup b_1 \cup b_2$ を示しているが，図で見る通り $\partial(C \cup b_1 \cup b_2) \cong \Sigma^1$ である．よって（I）の場合のように，b_3 以下のバンドの両はしを $\partial(C \cup b_1 \cup b_2)$ の上を滑らせて，$\partial(C \cup b_1 \cup b_2)$ 上にあらかじめとっておいた PL 弧 J の中に押し込められる．こうして図 6.21 の部分が分離できる．((I）の場合と同じプロセス）これはバンドがなくなるまで続行できる．

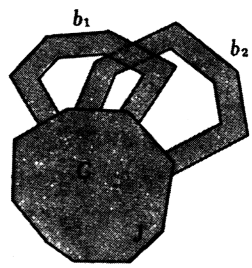


図 6.21

注意　3次元の中でバンドを滑らせると，お互いにからみ合ってしまうことがあるが，‘3次元の内部’にこだわらなければ

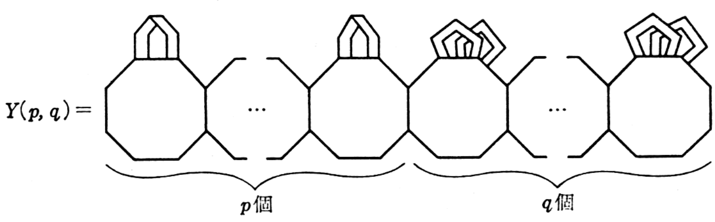


図 6.22

全くからみ合わないものと PL 同形である (図 6.19 と同じ事情).

以上で, $\partial Y \cong \Sigma^1$ であるような‘バンドつき円板’の標準形 $Y(p,q)$ が得られた(図 6.22).

$Y(p,q)$ のオイラー標数を計算しておこう. メビウスの帯のオイラー標数は 0 であり, 図 6.21 の多面体のオイラー標数は -1 である (図 6.23). また共通部分 = 線分のオイラー標数は 1.

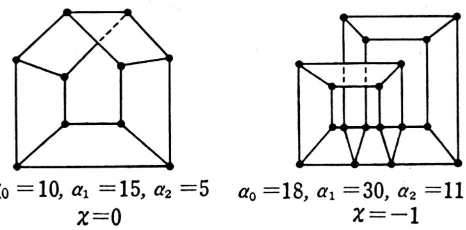


図 6.23

オイラー標数の公式 3 (§5.6) を次々に使って $\chi(Y(p,q))$ が容易に計算できる. 結果は

$$\chi(Y(p,q)) = 1 - p - 2q.$$

注意 $(p,q) \neq (p',q')$ であっても $Y(p,q) \cong Y(p',q')$ であり得る. 次はその一例である.

$$Y(3,0) \cong Y(1,1) \quad (\text{オイラー標数が等しいことを確かめよ.})$$

証明 図 6.20 の (a) が, ちょうどこの証明に必要な図になっている. 図 6.20 の (a) において b_2 が b_1 に沿って滑ると‘ひねったバンド’ b_2' になる. これは一般にいえ, あるバンドを‘ひねったバンド’に沿って滑らせると, そのバンドは 1 回多くひねられる. そこで, 図 6.20 (a) の最後の段階において, b_3 の‘足’のうち b_2' の足の間に入るものを b_2' に沿って滑らせると, ‘ひねったバンド’ b_3' になり, 動いた方の足は b_1 と b_2' の間にくる. さらに b_1 に沿って滑らせると, こんどはひねりがなくなり, その足は b_1 の両足の間に入る. さらに b_1 に沿って滑らせると, また‘ひねったバンド’になり, b_1 と b_2' からはずれる. 得られた‘バンドつき円板’は $Y(3,0)$ である.

次に, 図 6.20 (a) の最初の段階で, b_1 の片足を $\partial(C_1 \cup b_2 \cup b_3)$ に沿って滑らせると, b_1 は b_2, b_3 からはずれる. このとき, b_1 が‘ひねったバンド’であることに変わりはない. (一般に, ‘ひねっていないバンド’に沿って滑べらせたときいえる.) 得られたものは $Y(1,1)$ である. これで $Y(3,0) \cong Y(1,1)$ がいえた.

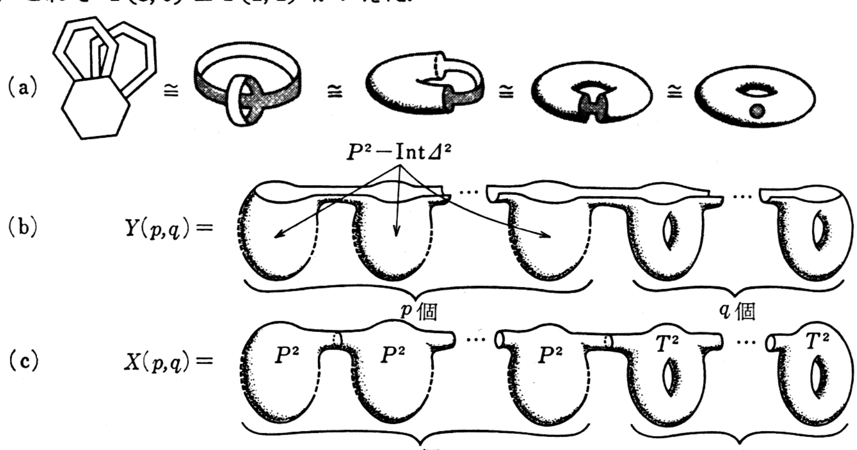


図 6.24

ステップ 5　メビウスの帯の境界 ($\cong\Sigma^1$) に沿って，2次元 PL 円板をはり合わせた PL 多様体を **PL 射影平面**とよぶ．§3.4 で説明した射影平面 P^2 ともちろん位相同形である．同じ記号 P^2 で表わそう．メビウスの帯は $P^2-\mathrm{Int}(\Delta^2)$ と考えられる．また，図 6.21 のバンドつき円板は，PL トーラス $T^2=\Sigma^1\times\Sigma^1$ から円板の内部を除いたものである (図 6.24 (a))．よって $T^2-\mathrm{Int}(\Delta^2)$ と考えられる．

標準形 $Y(p,q)$ を，射影平面，PL トーラスとの関係をはっきりさせるように書くと，図 6.24 (b) のようになる．$Y=Y(p,q)$ は，始めの閉曲面 X から円板 D の内部を除いた残りであったから，この $Y(p,q)$ に ‘ふた’ D をかぶせれば，始めの閉曲面 X が得られる．図 6.24 (c) は $Y(p,q)$ に ‘ふた’ をかぶせた閉曲面 $X(p,q)$ を示している．図 6.24 (c) で見るように，$X(p,q)$ はある意味でいくつかの P^2 と T^2 の ‘足し算’ になっている．

連結和

n 次元 PL 閉多様体が2つあるとし，それらを M^n, N^n とする．M^n, N^n から，それぞれ n 次元 PL 円板の内部を除いて $M^n-\mathrm{Int}(\Delta^n)$，$N^n-\mathrm{Int}(\Delta^n)$ とする．両方とも境界をもつ多様体になり，境界はともに Σ^{n-1} である．そこで，PL 同形 $f:\partial(M^n-\mathrm{Int}\,\Delta^n)\longrightarrow\partial(N^n-\mathrm{Int}\,\Delta^n)$ が存在する．この PL 同形を使って $M^n-\mathrm{Int}\,\Delta^n$ と $N^n-\mathrm{Int}\,\Delta^n$ を ‘はり合わせる’ ことができる．すなわち，点 $x\in\partial(M^n-\mathrm{Int}\,\Delta^n)$ と $f(x)\in\partial(N^n-\mathrm{Int}\,\Delta^n)$ を同一視するのである．こうして得られた多様体を M^n と N^n の**連結和**とよび，$M^n\# N^n$ で表わす (図 6.25)．

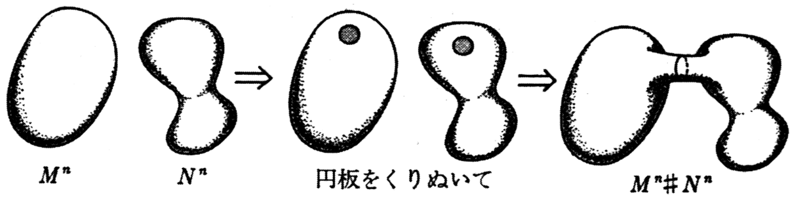


図 6.25　連結和

$M^n\# N^n$ を構成するには，M^n, N^n の中に n 次元円板を選ばねばならないし，$f:\partial(M^n-\mathrm{Int}\,\Delta^n)\longrightarrow\partial(N^n-\mathrm{Int}\,\Delta^n)$ も定めなければならない．しかし，これらをどのように選ぼうと，得られた $M^n\# N^n$ はすべて PL 同形であることが証明できる．結合法則: $(L^n\# M^n)\# N^n\cong L^n\#(M^n\# N^n)$ も成り立つ．よって，3つの和を簡単に $L^n\# M^n\# N^n$ と書くことができる．4つ以上の和についても同様である．

連結和の記号を使えば $X(p,q)=P^2\#\cdots\# P^2\# T^2\#\cdots\# T^2$ (P^2:p 個，T^2:q 個) となる．ステップ4の最後の注意によれば $Y(1,1)\cong Y(3,0)$ だった．これから $X(1,1)\cong X(3,0)$ がわかるが，連結和で書けば $P^2\# T^2\cong P^2\# P^2\# P^2$ ということになる．これは連結和の中に P^2 が入っていると，連結和の中の T^2 は2つの P^2 でおきかえられることを示している．たとえば，$P^2\# P^2\# T^2\# T^2$ は，

$$P^2 \# P^2 \# T^2 \# T^2 \cong P^2 \# (P^2 \# T^2) \# T^2 \cong P^2 \# (P^2 \# P^2 \# P^2) \# T^2$$
$$\cong P^2 \# P^2 \# P^2 \# (P^2 \# T^2) \cong P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2$$

となって，すべてが P^2 の連結和の形に変形されてしまう．したがって全く P^2 を含まない連結和 $T^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2$ か，あるいは全部が P^2 の連結和 $P^2 \# P^2 \# \cdots \# P^2$ だけを考えておけば十分であって，任意の連結な閉曲面はそのいずれかに PL 同形になってしまうのである．

一般の $X(p,q)$ のオイラー標数を求めておこう．それは $Y(p,q)$ のオイラー標数から計算できる．$X(p,q) \cong Y(p,q) \cup D$, $Y(p,q) \cap D = \Sigma^1$．そして $\chi(Y(p,q)) = 1-p-2q$, $\chi(D) = 1$, $\chi(\Sigma^1) = 0$．これから，$\chi(X(p,q)) = (1-p-2q)+1-0 = 2-p-2q$ (cf. §5.6 公式 3)．とくに $\chi(X(0,q)) = 2-2q$ $(q \geqq 0)$, $\chi(X(p,0)) = 2-p$ $(p \geqq 1)$.

以上で次の定理が証明できた．

【定理 6.7】 X を連結な閉曲面とすると，X は次のリストのどれかひとつの閉曲面に PL 同形である．

(i) $X(0,q) = T^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2$

(T^2 が q 個, $q \geqq 0$．ただし，$q=0$ のときは Σ^2 と考える．)

(ii) $X(p,0) = P^2 \# P^2 \# \cdots \# P^2$ (P^2 が p 個, $p \geqq 1$)

しかも，このリストには重複がない．つまり異なる記号で表わされるものは互いに PL 同形ではないことがいえる．

その証明を考えてみよう．(i) のクラスに属する閉曲面は Σ^2, T^2, $T^2 \# T^2$, $T^2 \# T^2 \# T^2, \cdots$ という系列をなしていて，そのオイラー標数は 2, 0, −2, −4, … である．PL 同形ならオイラー標数は等しいはずであるから (cf. §6.1)，これらは互いに PL 同形ではない．

(ii) のクラスの閉曲面は P^2, $P^2 \# P^2$, $P^2 \# P^2 \# P^2$, $P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2, \cdots$ という系列をなす．そのオイラー標数は 1, 0, −1, −2, …．よってクラス (ii) の中の閉曲面同士も互いに PL 同形ではない．

問題なのは第 (i), 第 (ii) クラスの間の PL 同形関係である．これらの間には同じオイラー標数をもつものがある．たとえば，$\chi(T^2) = \chi(P^2 \# P^2) = 0$．$T^2$ と $P^2 \# P^2$ は PL 同形なのだろうか？ 実はそうではない．直観的に言えば $P^2 \# P^2$ にはメビウスの帯が含まれているが，T^2 には含まれていない．メビウスの帯を含むか含まないかは，PL 同形で不変な性質だから，T^2 と $P^2 \# P^2$ とは PL 同形ではない．この議論は筋としてはこれでよいが，しかしよく考えてみると，この議論には1か所だけ証明されていない事実が使われている．それは 'T^2 はメビウスの帯を含まない' という事実である．直観的にはアタリマエに思われる．しかし，本当にアタリマエだろうか？ もしかすると，T^2 の中の奇妙な位置にメビウスの帯が隠れているかも知れないではないか．実はそんなことはなくて，T^2 はメビウスの帯を含まないことが証明できるのだが，その証明は第8章で代数的トポロジーの知識を準備した上で与えることにしょう．

研究問題 T^2 がメビウスの帯を含まないことを，代数的トポロジーの知識を全く使わず直観的，幾何的方法だけ示すことができるだろうか．

後で証明されるように，クラス (i) と (ii) はメビウスの帯を含むかどうかで区別され，互いに PL 同形にはならないのである．メビウスの帯を含まない2次元多様体を**向きづけ可能**，含むものを**向きづけ不可能**という．(i) は向きづけ可能な閉曲面のクラス，(ii) は向きづけ不可能の閉曲面のクラスである．こうして次の系が得られる．

【系】 連結な閉曲面 X, Y が PL 同形なための必要十分条件は，次の ① かつ ② である．

① 向きづけ可能か不可能かが一致する．

② オイラー標数が等しい．$\chi(X)=\chi(Y)$

観察 この系によれば，$P^2 \# P^2$ と T^2 とは PL 同形ではない．ところが，P^2 との連結和を作って $P^2 \# (P^2 \# P^2)$，$P^2 \# T^2$ にすると，前の注意によってこれらは PL 同形になる．PL 同形でない2つの閉曲面が，P^2 との連結和をとることによって PL 同形になるという現象があることがわかる．

閉曲面についての基本予想は，第8章の代数的トポロジーの説明の後で考えることにしよう (§8.4)．

第7章

群とその表示

§7.1　群

§6.4 の最後で，トーラスにメビウスの帯が含まれているか，という問題を考えた．これは直観的には NO! である．しかし，それを直観的方法だけで証明しようとしてもなかなかうまくいかない．目で見るだけの方法にはおのずと限界があるのである．我々も，これ以上進もうとすると代数的トポロジーの初歩的知識が必要になってくる．第一そのような知識がなければ，この本の目的とする‘4次元トポロジー’の基本定理を述べることさえできないだろう．次の第8章で代数的トポロジーを解説する．代数的トポロジーに‘群’の概念は不可欠であるから，この章で群論の基礎知識を準備しておくことにしよう．

まず，多少天降り式に群の定義を与える．

【定義】 集合 G にある演算 $a\circ b$ が定められていて，それが次の3条件を満たすとき，G を**群** (group) という．

(i) (結合法則) 任意の $a, b, c \in G$ について，$(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$ が成り立つ．

よって，カッコを省いて，$a\circ b\circ c$ と書ける．何個についても $a\circ b\circ c\circ\cdots\circ d$ が意味をもつ．$a\circ b\circ c\circ\cdots\circ d=(((a\circ b)\circ c)\circ\cdots\circ d)$ と思えばよい．

(ii) (単位元の存在) G の中に**単位元**とよばれる特別な要素 e があって，どんな $a\in G$ についても $e\circ a = a\circ e = a$ が成り立つ．(注意: 単位元は G の中にひとつしかない．もし $e'\in G$ も単位元の性質をもてば $e' = e'\circ e = e$ となるから．以下，e を単位元の記号とする．)

(iii) (逆元の存在) G の各々の要素 a について，$a\circ a^{-1} = a^{-1}\circ a = e$ となるような要素 a^{-1} が G の中に存在する．これを a の**逆元**という．(注意: a の逆元は各 a についてひとつしかない．$a^{-1}, (a^{-1})'$ がともに a の逆元なら，$(a^{-1})' = (a^{-1})'\circ e = (a^{-1})'\circ a\circ a^{-1} = e\circ a^{-1} = a^{-1}$ だからである．また，$a\circ a^{-1} = a^{-1}\circ a = e$ という式は，a が a^{-1} の逆元であることも示している．よって $(a^{-1})^{-1} = a$ である．)

演算 $a\circ b$ は，しばしば‘**積**’とよばれる．

《例 1》 0でない実数全体を $\boldsymbol{R}^*$ とする: $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} - \{0\}$．$\boldsymbol{R}^*$ の要素の間に通常の意味の

積 ab を考えれば，$\boldsymbol{R}^*$ は群になる．

実際 (i) $(ab)c = a(bc)$ は明らか．(ii) $e = 1$ とおけば $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. よって単位元がある．(iii) a の逆元 a^{-1} は $1/a$ に等しい．$a \neq 0$ であるから $1/a$ が考えられるのである．

同様に，0でない有理数全体 $\boldsymbol{Q}^*$，0でない複素数全体 $\boldsymbol{C}^*$ も群になる．群の定義にいう‘積’ $a \circ b$ は，この場合すべて通常の掛け算である．

《例 2》 整数全体の集合を $\boldsymbol{Z}$ とし，演算として足し算 $m+n$ を考える．(習慣的な言葉使いとは一致しないが，群の‘積’演算はこの場合，和である．) 結合法測 $(m+n)+l = m+(n+l)$ は明らか．また $e=0$ とおけば $m+0=0+m=m$. よって単位元0がある．さらに，任意の m について‘マイナス m’は $m+(-m)=(-m)+m=0$ を満たすから，$(-m)$ が m の逆元である．$\boldsymbol{Z}$ は足し算 $+$ という演算に関して群をなす．これを**整数の加法群**という．

同様に，有理数全体 $\boldsymbol{Q}$，実数全体 $\boldsymbol{R}$，複素数全体 $\boldsymbol{C}$ も足し算に関して群になる．

これらはいずれも身近な‘演算’だったが，もう少し‘抽象的な’群もある．

《例 3》 $A = \{1, 2, 3\}$ とする．数字の 1, 2, 3 からなる集合である．A から A への写像のうち，全単射であるようなものの全体を S_3 と書こう：$S_3 = \{f \mid f : A \longrightarrow A \text{ は全単射}\}$. S_3 は群になる．‘積’としては，$f, g \in S_3$ について合成写像 $f \circ g \in S_3$ をとる操作を考えるのである．結合法則：$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ はよい (cf. §1.2). また $e : A \longrightarrow A$ を恒等写像とすれば (i. e. $e = \text{id.}$)，$f \circ e = e \circ f = f$ であるから，単位元が存在する．$f : A \longrightarrow A$ の逆写像 $f^{-1} : A \longrightarrow A$ を考えれば $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$ であるから，逆元もある．こうして S_3 は群になった．S_3 を**3次対称群**とよぶ．

S_3 の‘表現法’を考えよう．ひとつの要素 $f \in S_3$ は A から A への全単射だから，1, 2, 3 をそれぞれどこに写すかを指定すれば決まる．1, 2, 3 の行き先 $f(1), f(2), f(3)$ を 1, 2, 3 の下に書いて

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$$

と表わすことにする．この表わし方で S_3 のすべての要素が書き並べられる．それらは合計6個 (=3!) ある．それらに次のような名前 ($e, f_1, f_2, \cdots$ 等) をつけておこう．

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

上の表現法の便利な点は，‘積’がすぐに求められることである．たとえば，‘積’ $f_1 \circ f_2$ を求めてみる．f_2 の表示でみるように，1は f_2 によって3に写され，その3は f_1 によって2に写される．よって $f_1 \circ f_2(1) = 2$. また2は f_2 によって2自身に写され，その2は f_1 によって3に写される．よって，$f_1 \circ f_2(2) = 3$. 同様に $f_1 \circ f_2(3) = 1$. これから $f_1 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = g_1$ がわかる．

《**例 4**》 集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ からそれ自身への全単射の全体も，写像の合成という‘積’演算に関して群になる．これを **n 次対称群** S_n という．

例1，例2の‘積’演算はそれぞれ通常の掛け算，足し算だったから，交換法則 $ab = ba$，$a + b = b + a$ はもちろん成り立つ．しかし，一般の群では‘積’演算の交換法則 $a \circ b = b \circ a$ は，必ずしも成り立たない．たとえば S_3 では $f_1 \circ f_2 = g_1$ であったが，f_1 と f_2 を入れかえると $f_2 \circ f_1 = g_2$ がわかる．したがって $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$ である．交換法則 $a \circ b = b \circ a$ が成り立つような群を**可換群**（または，**アーベル群**）という．例1，例2は可換群である．上で見たように $n \geqq 3$ のとき，S_n は可換群でない．

部分群

群 G の部分集合 H が，G の‘積’演算に関して，それ自身群をなしているとき，H を G の**部分群**という．次のように言っても同じことである．

群 G の空（ϕ）でない部分集合 H が G の部分群であるとは，次の条件 (1), (2) が成り立つことである．

(1) a, b が H の要素なら，それらの G の中での‘積’ $a \circ b$ も H に入る．すなわち $a, b \in H \Longrightarrow a \circ b \in H$.

(2) a が H の要素なら，a の逆元 a^{-1} も H に入る．すなわち，$a \in H \Longrightarrow a^{-1} \in H$.

注意 条件 (1), (2) から $e \in H$ がわかる．なぜなら，$a \in H$ を任意にとると，(2) により $a^{-1} \in H$. よって (1) より $e = a \circ a^{-1} \in H$ だから．

《**例 5**》 G を群とする．単位元 e だけからなる部分集合 $\{e\}$ を考えると，部分群になっている．なぜなら $e \circ e = e$ だから (1) は OK. また $e \circ e = e$ は $e = e^{-1}$ を意味するから $e^{-1} \in \{e\}$ も OK. $\{e\}$ を**自明群**（trivial group）とよぶ．

《**例 6**》 3次対称群 $S_3 = \{e, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2\}$ の部分集合 $A_3 = \{e, g_1, g_2\}$ を考える．A_3 は部分群になる．

実際，例3の‘表現法’を使って計算すると，$e \circ g_1 = g_1 \circ e = g_1$，$e \circ g_2 = g_2 \circ e = g_2$，$g_1 \circ g_2 = e$，$g_2 \circ g_1 = e$ がわかる．同じ要素の積についても $e \circ e = e$，$g_1 \circ g_1 = g_2$，$g_2 \circ g_2 = g_1$ となる．よって A_3 のどんな要素の積を作っても，再び A_3 に入るから条件 (1) は OK. また $e^{-1} = e$，${g_1}^{-1} = g_2$，${g_2}^{-1} = g_1$ がわかるから (2) も OK. A_3 を **3次交代群**とよぶ．

《**例 7**》 S_3 の部分群は A_3 だけに限らない．e と f_1 からなる部分集合 $\{e, f_1\}$ も S_3 の部分群になる．

実際，この部分集合の要素の積を作ると，$e \circ e = e$，$e \circ f_1 = f_1 \circ e = f_1$，$f_1 \circ f_1 = e$ となって，$\{e, f_1\}$ の外に出ない．よって (1) は OK. また，逆元についても $e^{-1} = e$，${f_1}^{-1} = f_1$ だから (2) も OK. 部分群 $\{e, f_1\}$ を簡単に S' と書いておく（慣習上の記号ではない）．同様に $S'' = \{e, f_2\}$，$S''' = \{e, f_3\}$ もそれぞれ S_3 の部分群になる．

《**例 8**》 q をひとつの整数とし，q の倍数全体を $(q)\boldsymbol{Z}$ と書く．$(q)\boldsymbol{Z}$ は加法群 $\boldsymbol{Z}$ の部分群になる．

qm_1 と qm_2 の和は $qm_1+qm_2=q(m_1+m_2)\in(q)\boldsymbol{Z}$. ゆえに (1) は OK. qm_1 の逆元は $q(-m_1)$ だから (2) も OK.

G を群とし，H をひとつの部分群とする．G の2つの要素 a, b について，**a が H によって b に移れる**ということを，'$a\circ h=b$ となるような H の要素 h があること' と定義してみよう．記号で $a\sim b$ と書く．

次のことが確かめられる．

(i)　$a\sim a$. なぜなら $a\circ e=a$ $(e\in H)$ であるから．

(ii)　$a\sim b\Longrightarrow b\sim a$. なぜなら $a\circ h=b$ $(h\in H)$ なら，$a=a\circ e=a\circ(h\circ h^{-1})=(a\circ h)\circ h^{-1}=b\circ h^{-1}$. よって $b\circ h^{-1}=a$ $(h^{-1}\in H)$ であるから．

(iii)　$a\sim b, b\sim c\Longrightarrow a\sim c$. なぜなら $a\circ h_1=b$ $(h_1\in H)$, $b\circ h_2=c$ $(h_2\in H)$ なら，$a\circ(h_1\circ h_2)=(a\circ h_1)\circ h_2=b\circ h_2=c$ $(h_1\circ h_2\in H)$ であるから．

これで $a\sim b$ が G の要素の間の同値関係（cf. §4.1，ノート）になることがわかった．この同値関係により，G は有限または無限個の同値類に分かれる．たとえば $G=C_0\cup C_1\cup C_2\cup\cdots$ というようになる．すなわち，同じ同値類 C_i に属する2要素 a, b は H によって互いに移り合えるが，異なる C_i, C_j に属する a, b $(a\in C_i, b\in C_j)$ は H よって移り合えない．このような G の分割を，**部分群 H による G の類別**という．（各々の同値類 C_i を，H に関する**剰余類**とよぶ．）G の要素 a から H によって移れる要素は，みな $a\circ h$ $(h\in H)$ というかたちをしているはずである．よって，ひとつひとつの剰余類 C_i は任意の $a\in C_i$ を選んで $C_i=a\circ H$ と書ける．ここに $a\circ H=\{a\circ h\,|\,h\in H\}$ である．$H=e\circ H$ であるから，部分群 H は単位元 e を含んでいる剰余類（それを C_0 とする）に一致する：$H=C_0$.

《例 9》　A_3 による S_3 の類別

まず $A_3=\{e, g_1, g_2\}$ 自身がひとつの剰余類をなす．次に A_3 入っていない S_3 の要素，たとえば f_1 をひとつとり，$f_1\circ A_3$ を考えると，例3の計算で $f_1\circ A_3=\{f_1\circ e, f_1\circ g_1, f_1\circ g_2\}=\{f_1, f_2, f_3\}$ が確かめられる．S_3 の6つの要素は，A_3 と $f_1\circ A_3$ の2クラスに分けられてしまった．これで A_3 よる類別ができた．結果は，$S_3=A_3\cup f_1\circ A_3$.（なお $f_1\circ A_3=f_2\circ A_3=f_3\circ A_3$ である．）

《例 10》　S' による S_3 の類別

S_3 を別の部分群 $S'=\{e, f_1\}$ によって類別してみる．S' 自身がひとつの剰余類である．次に S' に含まれない f_2 をとり，$f_2\circ S'$ を考える．$f_2\circ S'=\{f_2\circ e, f_2\circ f_1\}=\{f_2, g_2\}$. さらに $S', f_2\circ S'$ に入らない f_3 をとる．$f_3\circ S'=\{f_3\circ e, f_3\circ f_1\}=\{f_3, g_1\}$. これで S_3 のすべての要素が3つのクラスに類別できた．$S_3=S'\cup f_2\circ S'\cup f_3\circ S'$.

《例 11》　例8の q をとくに $q=3$ として加群 $\boldsymbol{Z}$ の部分群 $(3)\boldsymbol{Z}$ による類別を考えてみよう．まず，$(3)\boldsymbol{Z}=\{\cdots,-3,0,3,6,9,\cdots\}$ がひとつの剰余類をなす．$(3)\boldsymbol{Z}$ に入っていない整数，たとえば1をとると $1+(3)\boldsymbol{Z}=\{\cdots,1-3,1+0,1+3,1+6,1+9,\cdots\}=\{\cdots,-2,1,4,7,10,\cdots\}$ がもうひとつの剰余類をなす．$(3)\boldsymbol{Z}$ にも $1+(3)\boldsymbol{Z}$ にも入っていない整数，たとえば 2 をとると，$2+(3)\boldsymbol{Z}=\{\cdots,-1,2,5,8,11,\cdots\}$ がさらにもうひとつの剰余類になる．ここまでで

すべての整数が尽くされてしまった．よって $\boldsymbol{Z}$ は $(3)\boldsymbol{Z}$ によって3つの剰余類に分割された．$\boldsymbol{Z}=(3)\boldsymbol{Z}\cup(1+(3)\boldsymbol{Z})\cup(2+(3)\boldsymbol{Z})$.

さて群 G が部分群 H によって類別されているとする．$G=C_0\cup C_1\cup C_2\cup\cdots$．このとき次のようなことを調べてみよう．

2つの剰余類 C_i と C_j をとり，C_i の要素 a と C_j の要素 b の‘積’ $a\circ b$ を作る．$a\circ b$ はどれかの剰余類 C_k に属するはずである．次に同じ C_i から別の a'，C_j から別の b' を選んで，また‘積’ $a'\circ b'$ を作る．（$a\circ b$ のときのように，C_i の要素を前にし C_j の要素を後にしておく．）得られた $a'\circ b'$ はさっきの $a\circ b$ と同じ剰余類 C_k に属すかという問題である．

C_i と C_j さえ決めておけば，C_i の要素と C_j の要素の‘積’は常に一定の C_k に入るか？というのである．

実例で調べてみる．

《実例 1》 $\boldsymbol{Z}=(3)\boldsymbol{Z}\cup(1+(3)\boldsymbol{Z})\cup(2+(3)\boldsymbol{Z})$ の場合

記号の便利のため，$C_0=(3)\boldsymbol{Z}$, $C_1=1+(3)\boldsymbol{Z}$, $C_2=2+(3)\boldsymbol{Z}$ とおく．加群の場合‘積’は足し算（和）だった．

C_0 は3の倍数全体，C_i は3で割ると i 余る整数全体である（$i=1,2$）．よって C_0 の要素と C_i の要素を加えると必ず C_i に入る．

C_1 と C_2 ではどうか．C_1 の要素は $1+3m$ と書け，C_2 の要素は $2+3n$ と書ける．よってその和は $3+3(m+n)$ となり3の倍数になる．すなわち，C_1 の要素と C_2 の要素の和は常に C_0 に入る．

全く同様に，C_0 の要素同士の和は C_0 に入り，C_1 の要素同士なら C_2 に，また C_2 の要素同士なら C_1 に入ることがわかる．よって実例1の場合，上の問題は肯定的である．

《実例 2》 $S_3=A_3\cup f_1\circ A_3$ の場合

$A_3=\{e,g_1,g_2\}$，$f_1\circ A_3=\{f_1,f_2,f_3\}$ であった．この場合も実は肯定的である．A_3 は S_3 の部分群だから，A_3 の要素同士の積が A_3 に入るのはアタリマエ．他の剰余類の間の積についてもすべていえるが，全部を述べるのはめんどうだから，A_3 の要素 a と $f_1\circ A_3$ の要素 b について積 $a\circ b$ を作った場合を調べてみる．この形の積は全部で9個ある．実際に計算すると $e\circ f_1=f_1$, $e\circ f_2=f_2$, $e\circ f_3=f_3$, $g_1\circ f_1=f_3$, $g_1\circ f_2=f_1$, $g_1\circ f_3=f_2$, $g_2\circ f_1=f_2$, $g_2\circ f_2=f_3$, $g_2\circ f_3=f_1$ となる．答はすべて一定の剰余類 $f_1\circ A_3$ に属している．

《実例 3》 $S=S'\cup f_2\circ S'\cup f_3\circ S'$ の場合

この場合には否定的である．$S'=\{e,f_1\}$，$f_2\circ S'=\{f_2,g_2\}$，$f_3\circ S'=\{f_3,g_1\}$ だったことを思い出して，計算してみる．S' は部分群だから，S' の要素同士の積が S' に入るのはよい．ところが S' の要素と $f_2\circ S'$ の要素の積を考えると $e\circ f_2=f_2\in f_2\circ S'$, $f_1\circ f_2=g_1\in f_3\circ S'$ となり，積の属する剰余類は一定していない．

これら実例で見るように，剰余類への分割の仕方で上の問題は肯定的の場合も否定的の場合もある．剰余類への分割は結局，考えている部分群によって決まってしまうのだから，上の問題が肯定的か否定的かは部分群の性質である．

【定義】 上の問題が肯定的であるような部分群を**正規部分群**とよぶ.

たとえば, $(3)\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{Z}$ の正規部分群である（実例1). また A_3 は S_3 の正規部分群である（実例2). ところが S' は S_3 の正規部分群ではない（実例3).

H が G の正規部分群ならば, H による G の類別 $G = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots$ において, C_i に属する要素 a と C_j に属する要素 b の積 $a \circ b$ を作ると, その答の属する C_k は C_i と C_j で決まってしまう. C_k を $C_i \cdot C_j$ と書くことにしよう. すると, 剰余類の集合 $\{C_0, C_1, C_2, \cdots\}$ の中に新しく‘積’ $C_i \cdot C_j$ が定義できたことになる. ($C_i \cdot C_j = C_k$ とは, ‘C_i の要素と C_j の要素の積は C_k に入る’という意味であるが, 実はそれだけでなく, C_i の要素と C_j の要素の積全体は C_k に一致してしまうのである.)

剰余類の間の‘積’ $C_i \cdot C_j$ は, 各剰余類 C_i を $C_i = a \circ H$ $(a \in C_i)$ という形に表わしておくと見やすい. 剰余類 $a \circ H$ と $b \circ H$ の‘積’は $(a \circ b) \circ H$ である: $(a \circ H) \cdot (b \circ H) = (a \circ b) \circ H$.

【定理 7.1】 この‘積’に関して剰余類の集合 $\{C_0, C_1, C_2, \cdots\}$ は群になる.

証明 $C_0 = H$ が‘単位元’の役割を果たす. 実際, $C_i = a \circ H$ のとき $C_0 \cdot C_i = (e \circ H) \cdot (a \circ H) = (e \circ a) \circ H = a \circ H$. 同様に $C_i \cdot C_0 = (a \circ H) \cdot (e \circ H) = a \circ H = C_i$. 結合法則も同様にして, $((a \circ H) \cdot (b \circ H)) \cdot (c \circ H) = ((a \circ b) \circ H) \cdot (c \circ H) = ((a \circ b) \circ c) \circ H = (a \circ (b \circ c)) \circ H = (a \circ H) \cdot ((b \circ c) \circ H) = (a \circ H) \cdot ((b \circ H) \cdot (c \circ H))$. 剰余類 $a \circ H$ の‘逆元’は剰余類 $a^{-1} \circ H$ である. 実際, $(a \circ H) \cdot (a^{-1} \circ H) = (a \circ a^{-1}) \circ H = e \circ H = H$. 証明終り.

上で得られた群 $\{C_0, C_1, C_2, \cdots\}$ を **G の H による剰余群**とよび G/H と表わす. (群 G/H の要素は C_i であるが, C_i をいつまでも剰余類だと思っていると, G/H が‘集合の集合’のように思われてスッキリしない. むしろ G/H は $C_0, C_1, C_2, \cdots$ という意味のない記号の集まりで, その間に‘積’が定義されているのだと考えなおした方がよい. あるいは同じ C_i に属する要素をすべて同一視してしまった集合と思ってもよい. たとえば $C_0 = H$ に属する要素は全部, 単位元に同一視してしまうと思うのである.)

いずれにせよ, 群 G に正規部分群 H があると, 剰余群 G/H ができるのである.

《例 12》 剰余群 $\boldsymbol{Z}/(3)\boldsymbol{Z}$ を簡単に $\boldsymbol{Z}_3$ と書く. また, 剰余類 $(3)\boldsymbol{Z}$, $1+(3)\boldsymbol{Z}$, $2+(3)\boldsymbol{Z}$ を記号で $0, 1, 2$ と書く. すると, $\boldsymbol{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. 剰余類の間の演算 (cf. 実例1) を再び‘足し算’の記号で書けば, $0+1=1+0=1$, $0+2=2+0=2$, $1+1=2$, $1+2=2+1=0$, $2+2=1$. 要するに, $0, 1, 2$ の間に通常の足し算をして, 答を3で割った余り（剰余）を考えたものになっている. これが剰余群という名前の由来である.

同様に $q \geqq 1$ のとき $(q)\boldsymbol{Z}$ も $\boldsymbol{Z}$ の正規部分群で $\boldsymbol{Z}_q = \boldsymbol{Z}/(q)\boldsymbol{Z}$ が考えられる. $\boldsymbol{Z}_q = \{0, 1, 2, \cdots, q-1\}$. 計算法も同様に, $0, 1, 2, \cdots, q-1$ の間に通常の足し算をして, q で割った余りを考えたものである.

《例 13》 S_3/A_3 の剰余類 A_3, $f_1 \circ A_3$ を記号で $[e], [f_1]$ と書く: $S_3/A_3 = \{[e], [f_1]\}$. ‘積’の規則は, $[e] \cdot [e] = [e]$, $[e] \cdot [f_1] = [f_1] \cdot [e] = [f_1]$, $[f_1] \cdot [f_1] = [e]$ である.

【定理 7.2】 G の部分群 H が正規部分群であるための必要十分条件は, 任意の $a \in G$ について $a^{-1} \circ H \circ a \subset H$ が成り立つことである. ここに $a^{-1} \circ H \circ a = \{a^{-1} \circ h \circ a \mid h \in H\}$.

証明 必要条件であること．H が正規部分群であるとすると剰余類の間の‘積’・が定義できる．とくに $(a^{-1}\circ H)\cdot(a\circ H)=H$. これは $a^{-1}\circ H$ のどんな要素と $a\circ H$ のどんな要素の‘積’を作っても，H に入ってしまうという意味である．$a^{-1}\circ H$ の要素は $a^{-1}\circ h$ という形をしている．よって $(a^{-1}\circ h)\circ a\in H$. h は H の任意の要素だから $a^{-1}\circ H\circ a\subset H$ がわかった．

十分条件であること．任意の $a\in G$ について $a^{-1}\circ H\circ a\subset H$ が成り立つとしよう．剰余類 $a\circ H$ の要素 $a\circ h$ と剰余類 $b\circ H$ の要素 $b\circ h'$ をとり，その G での‘積’を考える．$(a\circ h)\circ(b\circ h')=(a\circ b\circ b^{-1}\circ h)\circ(b\circ h')=(a\circ b)\circ(b^{-1}\circ h\circ b)\circ h'$. 仮定から $b^{-1}\circ h\circ b\in H$. また H は部分群だから $(b^{-1}\circ h\circ b)\circ h'\in H$. よって積 $(a\circ h)\circ(b\circ h')$ は常に同じ剰余類 $(a\circ b)\circ H$ に入っている．証明終り．

注意 普通は，‘任意の $a\in G$ について $a^{-1}\circ H\circ a\subset H$’という条件の方を正規部分群の定義としている．

【系】 可換群 G の任意の部分群 H は正規部分群である．

証明 交換法則 $h\circ a=a\circ h$ から，$a^{-1}\circ h\circ a=a^{-1}\circ a\circ h=e\circ h=h$. よって $a^{-1}\circ H\circ a=H$ がわかる．証明終り．

§7.2 群の表示

群の話をもう少し続けよう．この § で説明することは，後で基本群（§8.1）の計算などに役立つ．

自由群

有限個の文字または記号を考える．しばらくの間それを3個の文字 a,b,c としよう．これらを任意の順序に書き並べた有限列を‘a,b,c を文字とする**語**’という $abc, caba, cbb, ababab, a, cab$ などはみな語である．（ここには6個の語がある．）ひとつひとつの語を u,v,w, etc. で表わす：$u=abc$, $v=caba$, $w=cbb$, etc.

2つの語 u,v についてその積 uv が定義できる．単に u と v をこの順に並べて‘くっつけた’語を考えればよい．たとえば $u=abc$, $v=caba$ のとき，$uv=abccaba$. 語の積について結合法則が成り立つことは明らかだろう．

実験 $u=abc$, $v=caba$, $w=cbb$ とする．$(uv)w=(abccaba)cbb=abccabacbb$. また $u(vw)=abc(cabacbb)=abccabacbb$. よって $(uv)w=u(vw)$. やはりアタリマエ．

‘何も書いてない語’（空なる語）も語の仲間に入れて e とする：$e=\quad$. e は語の積について単位元の役割を果たす：$eu=ue=u$. （e は単なる記号と思ってもよい．）我々は‘語の群’を考えたいのだが，まだ逆元がない．そこで，a,b,c の‘逆’という‘文字’ a^{-1},b^{-1},c^{-1} を形式的に考え，$a,b,c,a^{-1},b^{-1},c^{-1}$ を文字とする語全体を考える．（空なる語 e も含む．）語の積は前と同様に‘並べてくっつける’操作と考える．結合法則 $(uv)w=u(vw)$ は明らかである．

新たに次の約束をする：$aa^{-1}=a^{-1}a=e$, $bb^{-1}=b^{-1}b=e$, $cc^{-1}=c^{-1}c=e$. すなわち，

ある文字とその逆の文字を並べて書いた語を‘空なる語’と同一視するのである．この約束のもとに $a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}$ の語の全体は（‘並べてくっつける’積に関して）群をなす．これを**階数3の自由群**（free group of rank 3）といい，記号 F_3 または $F(a, b, c)$ で表わす．

計算例　①　語の例: abc, $a^{-1}bc^{-1}$, $cc^{-1}c^{-1}c^{-1}a^{-1}bc, \cdots$

②　積の例: $(abc)(c^{-1}bc) = abcc^{-1}bc = abebc = abbc$.

③　$(abc)(c^{-1}b^{-1}a^{-1}) = abcc^{-1}b^{-1}a^{-1} = abb^{-1}a^{-1} = aa^{-1} = e$. よって $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$, $(c^{-1}b^{-1}a^{-1})^{-1} = abc$.

④　もうひとつ逆元の例: $(ab^{-1}c^{-1}b)^{-1} = b^{-1}cba^{-1}$. 実際, $(ab^{-1}c^{-1}b)(b^{-1}cba^{-1}) = e$.

【定義】　一般に，相異なる $2n$ 個の記号 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \cdots, \alpha_n^{-1}$ を考える．これらを文字とする語の全体の集合（空なる語も含む）に‘並べてくっつける’積演算を入れ，さらに，規約 $\alpha_i\alpha_i^{-1} = \alpha_i^{-1}\alpha_i = e$ を設けたものを，**階数 n の自由群**（free group of rank n）とよぶ．記号で F_n または $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ と表わす．

規約 $\alpha_i\alpha_i^{-1} = \alpha_i^{-1}\alpha_i = e$ を設けたので，自由群 $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ の要素は厳密には‘語そのもの’ではない．たとえば，$abb^{-1}c$ と ac は語としては確かに違う．（一方は a, b, b^{-1}, c の4文字を含み，他方は a, c しか含まない．）しかし，規約によって $F(a, b, c)$ の要素としては $abb^{-1}c = ac$ である．そこで一般に，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha_1^{-1}, \cdots, \alpha_n^{-1}$ を文字とする2つの語 u と v が与えられたとき，それらが $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ の要素として同じになるかどうかを判定することが問題になる．これを自由群における**語の問題**という．

$\alpha_i\alpha_i^{-1}$ または $\alpha_i^{-1}\alpha_i$ という部分を含まない語を**既約な語**とよぶ．aab, bac, ca^{-1} などは既約である．$ac^{-1}cb$ は既約でない．もし語 u が既約でなければ，$\alpha_i\alpha_i^{-1}$ または $\alpha_i^{-1}\alpha_i$ という部分が少くともひとつ含まれている．そこで，そのひとつの $\alpha_i\alpha_i^{-1}$ または $\alpha_i^{-1}\alpha_i$ を取り除いて新しい語を作る．この操作を続けていくと有限回の操作ののちに，どんな語 u も既約な語 u' になってしまう．（$u' = e$ の可能性もある．）u と u' は，$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ の要素としてはもちろん同じものである．

《例》　$u = ccbaa^{-1}b^{-1}a\underbrace{c^{-1}c} \longrightarrow ccb\underbrace{aa^{-1}}b^{-1}a \longrightarrow cc\underbrace{bb^{-1}}a \longrightarrow cca = u'$（既約）

この操作を語の**簡約**という．$\alpha_i\alpha_i^{-1}$ または $\alpha_i^{-1}\alpha_i$ という部分が2か所以上あれば，どこを先に取り除くかという順序の違いがあるから，簡約のプロセスはひと通りではない．

自由群における語の問題は，簡約を使って次のように解決される．

【定理 7.3】　(1)　ひとつの語 u を，どんな順序で簡約しても，最後に得られる既約な語 u' は同じである．

(2)　2つの語 u と v が，$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ の中で同じ要素になるための必要十分条件は，両者を簡約して得た既約な語 u', v' が<u>語として</u>同じになることである．

(3)　2つの<u>既約な語</u> u と v が $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ の中で同じ要素になるための必要十分条件は，両者が語として同じであることである．（(2) の特別の場合．）

定理 7.3 は何だかアタリマエのことを言っているようだが，その証明は実はそれほどアタリマエではない．ここでは省略する（[15] 第III章参照）．

$F(a,b)$ の2要素 ab と ba を考える．これらはともに既約な語で，しかも語として異なる．よって定理 7.3 の (3) により，$F(a,b)$ の中で $ab \neq ba$. したがって，$F_n = F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ は $n \geqq 2$ なら可換群ではない．$n=1$ の場合を考えてみよう．

$F_1 = F(a)$ の構造

a と a^{-1} を文字とする語は $a, aa, aaa, aa^{-1}a^{-1}, a^{-1}a^{-1}, \cdots$ などである．もし $aa^{-1}a^{-1}$ のように，ひとつの語の中に a と a^{-1} が同居していると，必ず隣り合う a と a^{-1} が存在するから簡約できる．結局，a と a^{-1} を文字とする既約な語は $aaa\cdots a, e, a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1}$ という3つの形しかない．これらは p を整数として a^p という形に統一的に書ける．(例: $a^2 = aa$, $a^0 = e$, $a^{-3} = a^{-1}a^{-1}a^{-1}$) また a^p ($p \in \boldsymbol{Z}$) はすべて既約な語であるから，F_1 の要素として $a^p = a^q$ であるための必要十分条件は，$p = q$ となることである (定理 7.3 の (3))．以上で次のことがわかった．$F_1 = F(a)$ は a^p ($p \in \boldsymbol{Z}$) という形の語の全体である．積演算は $a^p a^q = a^{p+q}$ で与えられる．(例: $a^2a^{-3} = aaa^{-1}a^{-1}a^{-1} = a^{-1}$)

$F_1 = F(a)$ を a を生成元とする**無限巡回群**とよぶ．

整数の加法群 $\boldsymbol{Z}$ の要素 p に，無限巡回群 F_1 の要素 a^p を対応させる写像 $f: \boldsymbol{Z} \longrightarrow F_1$ を考えてみよう: $f(p) = a^p$. 明らかに f は全射であり，また $f(p) = f(q) \Longrightarrow (a^p = a^q) \Longrightarrow (p = q)$ であるから単射でもある．そして $f(p+q) = a^{p+q} = a^p a^q$ が成り立つ．

このように，2つの群 G と H の間に全単射 $f: G \longrightarrow H$ があり，両者の‘積’演算を保つならば，(すなわち $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$ であるならば) この f を**同型写像**とよぶことにする．そして，G と H は互いに**同型**であるという．記号で $G \cong H$ と書く．たとえば $\boldsymbol{Z}$ と F_1 は同型である ($\boldsymbol{Z} \cong F_1$)．このとき，G と H は群として同じ構造をもつと考えられる．同型写像 $f: G \longrightarrow H$ の逆写像もまた同型写像になる．

準同型写像

同型写像の条件から‘全単射’という条件を除くと，準同型写像が定義できる．群の間の写像 $f: G \longrightarrow H$ が**準同型写像**であるとは，任意の $a, b \in G$ について $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$ が成り立つことである．準同型写像は全射とも単射とも限らない．

《例 1》 $\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$，$\boldsymbol{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ とする．(cf. §7.1，例2および例 12)．$m \in \boldsymbol{Z}$ に対し，m を3で割った余りを対応させる写像を $f: \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}_3$ とする．例: $f(3) = 0$, $f(4) = 1$, $f(5) = 2$, $f(6) = 0$, $f(7) = 1$, $f(8) = 2$, etc. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ はすぐ確かめられる．f は全射であるような準同型写像である．これを全準同型写像とよぶことがある．同様に，全準同型写像 $f: \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}_q$ が定義できる: $f(m) = (m$ を q で割った余り$)$.

《例 2》(例1の一般化) G を群とし，H をその正規部分群とする．$f: G \longrightarrow G/H$ を $f(a) = a \circ H$ と定義すれば，f は全準同型写像になる．なぜなら §7.1，定理 7.1 の前で注意しておいたように $(a \circ b) \circ H = (a \circ H) \cdot (b \circ H)$ であるから．

この $f: G \longrightarrow G/H$ を**標準的な全準同型写像**とよぶ．

《例 3》 $\{e\}$ を自明群（§7.1 の例5）とすれば，任意の群 G についてアタリマエの準同型写像 $\{e\} \longrightarrow G$ と $G \longrightarrow \{e\}$ がある．（第1のものは e を e に写す．第2のものはすべてを e に写す．）

《例 4》 3次対称群 S_3 の3次交代群 A_3 による剰余群を S_3/A_3 とする（§7.1, 例 13）．$S_3/A_3 = \{[e], [f_1]\}$．$f: S_3/A_3 \longrightarrow \boldsymbol{Z}_2 = \{0, 1\}$ を $f([e]) = 0$, $f([f_1]) = 1$ とおけば，f は準同型写像．（注意：$\boldsymbol{Z}_2$ の'積'演算は和で与えられ，$0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=0$.）この f は全単射であるから，実は同型写像である：$S_3/A_3 \cong \boldsymbol{Z}_2$.

$f: G \longrightarrow H$ を準同型写像とするとき，$\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in G\}$ という H の部分集合を f の像（image）とよぶ．$f^{-1}(e) = \{a \in G \mid f(a) = e\}$ という G の部分集合を f の核（kernel）とよぶ．f の核を $\mathrm{Ker}(f)$ と表わす（図 7.1）．

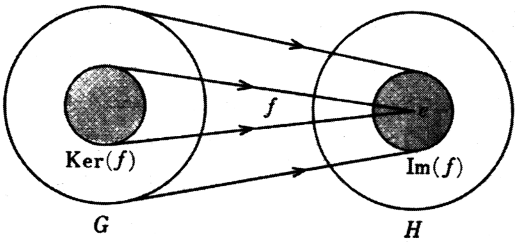


図 7.1

【補助定理】（i） $\mathrm{Im}(f)$ は H の部分群である．（ii） $\mathrm{Ker}(f)$ は G の正規部分群になる．

証明　部分群の2条件 (1), (2) を確かめる（cf. §7.1）．

$$a', b' \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow (a' = f(a),\ b' = f(b)) \Longrightarrow a' \circ b' = f(a) \circ f(b) = f(a \circ b) \Longrightarrow a' \circ b' \in \mathrm{Im}(f)$$

よって条件 (1) は OK．また，

$$a' \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow a' = f(a) \Longrightarrow a' \circ f(a^{-1}) = f(a) \circ f(a^{-1}) = f(a \circ a^{-1}) = f(e) = e$$
$$\Longrightarrow (a')^{-1} = f(a^{-1}) \in \mathrm{Im}(f) \qquad (f(e) = e \text{ についてはすぐ後で注意する．})$$

よって条件 (2) も OK．（なお，準同型について $f(e) = e$ となることは次のように示せる．$f(e) = f(e \circ e) = f(e) \circ f(e)$．この両辺に $f(e)^{-1}$ を掛けて $f(e) = e$.）以上で $\mathrm{Im}(f)$ が部分群であることが示せた．$\mathrm{Ker}(f)$ が G の部分群になることも条件 (1), (2) を示すことで容易にできる．（読者にまかせる．）

$\mathrm{Ker}(f)$ が正規部分群であることを確かめよう．§7.1 の定理 7.2 によれば，任意の $a \in G$ について $a^{-1} \circ \mathrm{Ker}(f) \circ a \subset \mathrm{Ker}(f)$ を示せばよい．$a^{-1} \circ \mathrm{Ker}(f) \circ a$ のひとつの要素 $a^{-1} \circ h \circ a$ $(h \in \mathrm{Ker}(f))$ をとる．すると，

$$f(a^{-1} \circ h \circ a) = f(a^{-1} \circ h) \circ f(a) = f(a^{-1}) \circ f(h) \circ f(a) = f(a^{-1}) \circ e \circ f(a)$$
$$= f(a^{-1}) \circ f(a) = f(a^{-1} \circ a) = f(e) = e$$

となって，$a^{-1} \circ h \circ a \in \mathrm{Ker}(f)$ がわかる．証明終り．

次の定理は群論において基本的である．

【定理 7.4】（準同型定理） $f: G \longrightarrow H$ を任意の準同型写像とする．補助定理により $\mathrm{Ker}(f)$ は G の正規部分群であるから，剰余群 $G/\mathrm{Ker}(f)$ が考えられる．そのとき $G/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$ である．

証明　部分群 $\mathrm{Ker}(f)$ による G の類別を $G = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots$ とすると，$G/\mathrm{Ker}(f) = \{C_0, C_1, C_2, \cdots\}$ である．次のことに注意しよう：ある剰余類 C_i の中から任意の要素 a を

選び，a のf による像を a' とすれば，その剰余類 C_i の中のどんな要素も同じ a' に写る．なぜなら，$C_i \ni a$ なら $C_i = a \circ K$ ($K = \mathrm{Ker}(f)$) と書け，C_i のどんな要素もみな $a \circ h$ ($h \in K$) という形をしている．よって $f(a \circ h) = f(a) \circ f(h) = f(a) \circ e = a'$.

この注意から，各剰余類 C_i に，C_i の中の要素 a の写った先 $f(a)$ を対応させて，写像 $f^* : G/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow H$ を定義することができる：$f^*(a \circ K) = f(a)$.

f^* は準同型写像である．

なぜなら，$f^*((a \circ K) \cdot (b \circ K)) = f^*((a \circ b) \circ K) = f(a \circ b) = f(a) \circ f(b) = f^*(a \circ K) \circ f^*(b \circ K)$ だから．

また，$\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Im}(f)$ ゆえ，f^* を $f^* : G/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ という写像とみなすことができ，$f^* : G/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ は全射である．

$f^* : G/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ が単射であること．

実際，$f^*(a \circ K) = f^*(b \circ K)$，$K = \mathrm{Ker}(f)$

$\Longrightarrow f(a) = f(b)$ （なぜなら $f^*(a \circ K) = f(a)$，$f^*(b \circ K) = f(b)$）

$\Longrightarrow f(b^{-1}) \circ f(a) = f(b^{-1}) \circ f(b) = f(b^{-1} \circ b) = f(e) = e$

$\Longrightarrow f(b^{-1} \circ a) = f(b^{-1}) \circ f(a) = e$

$\Longrightarrow b^{-1} \circ a \in K$，よって $b^{-1} \circ a = h$，$h \in K$ と書ける．

$\Longrightarrow a = b \circ h$ （$b^{-1} \circ a = h$ の両辺に左から b を掛けた．）

$\Longrightarrow a \circ K = b \circ K$

これで，$f^*(a \circ K) = f^*(b \circ K)$ なら $a \circ K = b \circ K$ がいえたので，$f^* : G/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ は単射，したがって全射と合わせて同型写像になることがわかった．証明終り．

《例 5》 $f : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}_q$ を標準的な全準同型写像とする．($f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\cdots$, $f(q-1) = q-1$, $f(q) = 0$, $\cdots$) そのとき $\mathrm{Im}(f) = \boldsymbol{Z}_q$，$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0) = (q)\boldsymbol{Z}$. 準同型定理は $\boldsymbol{Z}/(q)\boldsymbol{Z} \cong \boldsymbol{Z}_q$ を主張している．

群の表示

群 G の中に有限または無限個のある要素 $g_1, g_2, g_3, \cdots$ があって，G の任意の要素がこれらの $g_1, g_2, g_3, \cdots, g_1^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1}, \cdots$ の有限個の積として表わせるとき，$g_1, g_2, g_3, \cdots$ を G の**生成元**とよぶ．そして，G はこれらの生成元で**生成される**という．G が有限個の生成元 $g_1, g_2, \cdots, g_r$ で生成されるとき，群 G は**有限生成**であるという．

《例 6》 $F_n = F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ は n 個の生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ で生成される．F_n は有限生成である．

《例 7》 S_3 を 3 次対称群とする（§7.1，例3）．生成元として f_1, f_2 がとれる．実際，すべての要素がこれら（またはその逆元）の積として書ける：

$$e = f_1 \circ f_1^{-1}, \quad f_1 = f_1, \quad f_2 = f_2, \quad f_3 = f_1 \circ f_2 \circ f_1, \quad g_1 = f_1 \circ f_2, \quad g_2 = f_2 \circ f_1$$

同様に f_1, f_3（または f_2, f_3）も生成元としてとれる．

H を G の正規部分群とする．H の中に有限または無限個の要素 $h_1, h_2, h_3, \cdots$ があって，

H がこれらの要素を含む'最小の'正規部分群であるとき，H は $h_1, h_2, h_3, \cdots$ によって，**正規部分群として生成される**という．

H が $h_1, h_2, h_3, \cdots$ によって正規部分群として生成されるなら，まず ① H は $h_1, h_2, h_3, \cdots, h_1^{-1}, h_2^{-1}, h_3^{-1}, \cdots$ を含まねばならない．② H は正規部分群だから $a_1^{-1}\circ h_1\circ a_1$, $a_2^{-1}\circ h_2\circ a_2$, $\cdots$, $b_1^{-1}\circ h_1^{-1}\circ b_1$, $b_2^{-1}\circ h_2^{-1}\circ b_2, \cdots (a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ はそれぞれ G のすべての要素にわたって動く）という形の要素もすべて含まねばならない (cf. §7.1，定理 7.2)．さらに ③ H は部分群であるから，これらの積もすべて含まねばならない．

逆に上の ② の形の要素のいろいろな順序での積全体を H' とすると，H' は G の正規部分群であることが容易にわかる．上の ③ でみたように $H' \subset H$. しかも H はこのようなものの中で'最小'という仮定があるから，実は $H' = H$ でなければならない．これで，H が $h_1, h_2, h_3, \cdots$ によって正規部分群として生成されるという意味がはっきりした．H は ② の形の要素の有限の積全体なのである．記号で $H = (h_1, h_2, h_3, \cdots)$ と表わすことにする．

さて，群の表示を説明しよう．

G を，生成元 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ によって生成される有限生成の群とする．この生成元と同じ個数の生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ をもつ自由群 $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ を考える．

写像 $f: F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \longrightarrow G$ を，$f(\alpha_i) = g_i$ とおいて，準同型写像になるように定める．すなわち $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \cdots, \alpha_n^{-1}$ の語に対して，各 α_i に g_i を'代入した'積を対応させるのである．たとえば $f(\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_3) = g_1\circ g_2^{-1}\circ g_3$. この f が準同型写像になることはすぐわかる．しかも $g_1, g_2, \cdots, g_n$ は G の生成元であるから f は全射である．すなわち $\mathrm{Im}(f) = G$.

定理 7.4（準同型定理）によれば，$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)/\mathrm{Ker}(f) \cong G$. これは，任意の有限生成群 G が自由群の剰余群として表わせることを意味している．

さらに次の仮定をおく．

仮定　上の状況で，$\mathrm{Ker}(f)$ が有限個の $h_1, h_2, \cdots, h_r$ によって正規部分群として生成される．すなわち，$\mathrm{Ker}(f) = (h_1, h_2, \cdots, h_r)$.

すると，$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)/(h_1, h_2, \cdots, h_r) \cong G$ という同型関係が得られる．これが群 G の**表示**とよばれるものである．$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ をこの表示の**生成元**，$h_1, h_2, \cdots, h_r$ を**関係子**という．生成元，関係子と名づける理由は次の通りである．

自由群 $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ では，群として当然あるべき規約 $\alpha_i\alpha_i^{-1} = \alpha_i^{-1}\alpha_i = e$ のほかには，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の間に何の関係もなかった．(そのような諸関係から自由だ，というので自由群という.）ところが剰余群 $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)/(h_1, h_2, \cdots, h_r)$ では，$(h_1, h_2, \cdots, h_r)$ に属する要素はすべて単位元を表わしていると考えられる．したがって関係子 h_i を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \cdots, \alpha_n^{-1}$ の語と考えると，新たな（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の間の）関係 $h_1 = e$, $h_2 = e$, $\cdots$, $h_r = e$ がつけ加わっている．言いかえれば，$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)/(h_1, h_2, \cdots, h_r) \cong G$ という表示は，自由群 $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ の生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の間に新しい関係 $h_1 = e$, $h_2 = e$, $\cdots$, $h_r = e$ をつけ加えたものとして群 G を表わしていると考えられるのである．

このような考えから，剰余群 $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)/(h_1, h_2, \cdots, h_r)$ のことを（生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$

α_n と関係子 $h_1, h_2, \cdots, h_r$ の役割を強調して）

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \mid h_1 = e,\ h_2 = e,\ \cdots,\ h_r = e \rangle$$

という記号で表わすことが多い．普通は，$G \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \mid h_1 = e,\ h_2 = e,\ \cdots,\ h_r = e \rangle$ という形の式を群 G の表示と言っている．

《例 8》 自由群 F_n の表示．生成元は $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$．新たにつけ加える関係はない．よってその表示は，関係子の所を空白にして $F_n \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \mid \quad \rangle$ または簡単に $F_n \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \rangle$．

《例 9》 群 $Z_q = \{0, 1, \cdots, q-1\}$ の表示．Z_q の任意の要素は1の和として表わせる．たとえば，$2 = 1+1$，$3 = 1+1+1$，…，$q-1 = 1+1+\cdots+1$（$q-1$ 個），$0 = 1+1+\cdots+1$（q 個）．よって生成元は1．自由群 $F_1 = F(a)$ から Z_q への全準同型写像 $f: F(a) \longrightarrow Z_q$ を，$f(a) = 1$ とおいて定義する．こうすると，$f(a) = 1$，$f(a^2) = f(a) + f(a) = 2$，$f(a^3) = 3$，…，$f(a^{q-1}) = q-1$，$f(a^q) = 0$，…，一般に $f(a^m) = $（$m$ を q で割った余り）となる．$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0) = \{a^{nq} \mid n \in Z\}$ である．$\mathrm{Ker}(f)$ は a^q という要素によって（正規部分群として）生成される．よって求める表示は $Z_q \cong \langle a \mid a^q = e \rangle$．

なお，$\langle a \mid a^q = e \rangle$ $(= \{e, a, a^2, \cdots, a^{q-1}\})$ を**位数 q の有限巡回群**とよぶ．これに同型な Z_q をそのようによぶこともある．

《例 10》 3次対称群 S_3 の表示．S_3 の生成元として f_1, f_2 をとる（cf. 例 7）．$f: F(a, b) \longrightarrow S_3$ を $f(a) = f_1$，$f(b) = f_2$ とおいて定義する．（以下，群の要素 h について，$h^m, m \in Z$，という記号で h の‘べき’を表わす．例：$h^3 = h \circ h \circ h$．ただし，‘数’の場合と異なり $(ab)^n = a^n b^n$ は，考えている群が可換でない限り，一般には成立しない．）

$f(a^2) = (f_1)^2 = e$，$f(b^2) = (f_2)^2 = e$，$f((ab)^3) = (f_1 \circ f_2)^3 = (g_1)^3 = e$ であるから f は $f^*: F(a, b)/(a^2, b^2, (ab)^3) \longrightarrow S_3$ という全準同型写像を導く．（準同型定理 7.4 の証明と同様の議論で証明できる．）f^* は実は同型写像である．それを示すには S_3 が位数6の有限群（有限集合であるような群で要素の総数は6）であることに注意して剰余群 $F(a, b)/(a^2, b^2, (ab)^3)$ $(= \langle a, b \mid a^2 = e,\ b^2 = e,\ (ab)^3 = e \rangle)$ の方も，位数6以下の有限群であることを示せばよい．f^* は S_3 への全射だから，この剰余群の位数（要素の個数）が6以下ならば，必然的にちょうど6でなければならないのである．

さて群 $\langle a, b \mid a^2 = e,\ b^2 = e,\ (ab)^3 = e \rangle$ においては $a^2 = e$，$b^2 = e$ であるから，語としては a^2, b^2 を含まないものだけを考えればよい．同時に $a^2 = e$，$b^2 = e$ より $a = a^{-1}$，$b = b^{-1}$ であることもわかるから a^{-1}，b^{-1} を含まない語だけを考えてよい．さらに，$(ab)^3 = e$ だから，ab は続けて3つ以上含まれないとしてよい．これらのことから，$e, a, b, ab, ba, aba, bab, abab, baba, ababa, babab, bababa$ の 12 個の語だけを考えればよいことになる．

ところが $(aba)(bab) = (ab)^3 = e$ より $(bab) = (aba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}a^{-1} = aba$ がわかる．よって7番目の語は不要．8番目は $abab = a(bab) = a(aba) = a^2ba = ba$ だから不要．9番目は $baba = (bab)a = (aba)a = ab$ だから不要．10 番目：$ababa = a(bab)a = a(aba)a = b$．よって不要．11 番目：$babab = (bab)ab = (aba)ab = ab^2 = a$．よって不要．12 番目も

$bababa=(bab)aba=(aba)aba=e$ だから不要．したがって剰余群 $F(a,b)/(a^2,b^2,(ab)^3)$ の含む要素の個数は6以下．ゆえに前の注意からちょうど6（すなわち，e,a,b,ab,ba,aba）であることがわかり，f^* が同型であることが示せた．

こうして S_3 の表示 $S_3\cong\langle a,b\,|\,a^2=e,\ b^2=e,\ (ab)^3=e\rangle$ が得られた．この表示を簡単に $S_3\cong\langle a,b\,|\,a^2=b^2=(ab)^3=e\rangle$ と書くこともある．

注意 1　同じ群でもその表示の仕方にはいろいろなものがあり得る．たとえば，S_3 の生成元として f_1,g_1 を選べば，別の表示 $S_3\cong\langle a,b\,|\,a^2=b^3=(ab)^2=e\rangle$ が得られる．ただし一般に2つの表示 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\,|\,h_1=h_2=\cdots=h_r=e\rangle$ と $\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\,|\,k_1=k_2=\cdots=k_s=e\rangle$ が与えられたとき，それが同じ群の表示かどうか判定する一般的に有効な手続き（algorithm）は存在しないということが知られている．

注意 2　有限個の生成元と有限個の関係子による表示 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\,|\,h_1=e,\ \cdots,\ h_r=e\rangle$ を**有限表示**という．すべての群が有限表示できるわけではない．有限表示できる群を**有限表示群**とよぶ．（それは有限生成であって，適当な生成元 $g_1,\cdots,g_n$ について106ページの仮定が満たされるような群である．）

第8章

代数的トポロジー

§8.1 基 本 群

X を弧状連結な図形とする．X の中に1点 x_0 をとって固定する．x_0 から出発して x_0 にもどる X 内の連続曲線 $\varphi:[0,1] \longrightarrow X$, $\varphi(0)=x_0=\varphi(1)$ を，x_0 を**基点**とする X 内の**ループ** (loop = '環状線') とよぼう (図 8.1).

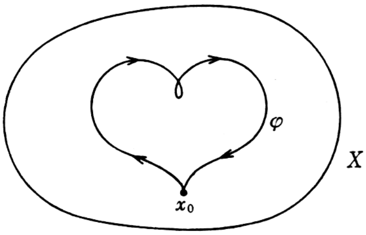


図 8.1

点 x_0 を基点とするループ φ が，X 内の '連続的変形' によって他のループ ψ に移り得るとき，φ は ψ に**ホモトープ** (homotopic) であるという．φ を X の中で少しずつ変えていって，ψ にまで変形できる，というのである．ただし，この変形は 'x_0 を基点とする X 内のループ' という性質を保ったままの変形である．図 8.2 (a) は φ が ψ に連続変形できる例，(b) は '穴' につっかえて変形できない例である．((b) の場合，変形できないことは図を見れば明らかだが，厳密には証明を要する．) 図の中の破線は，変形の中間段階のループたちである．

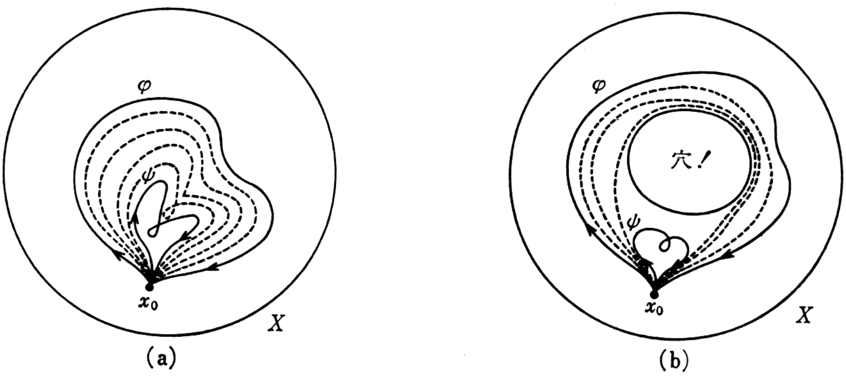


図 8.2

上のような直観的な説明に数学的な定式化を与えておこう．

【定義】 $\varphi, \psi:[0,1] \longrightarrow X$ を，x_0 を基点とする2つのループとする．φ が ψ に**ホモト**

ープであるとは，次の2条件を満たす連続写像 $h:[0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$ が存在することをいう．($[0,1]\times[0,1]$ の要素を (s,t) とする．)

(ｉ)　$h(s,0)=\varphi(s),\ h(s,1)=\phi(s)$　　(任意の $s\in[0,1]$ について)

(ii)　$h(0,t)=h(1,t)=x_0$　　(任意の $t\in[0,1]$ について)

2つの変数 s,t のうち，s はループ上のパラメータで，t は‘連続変形’のパラメータである．t を任意にひとつ固定して，s を0から1まで動かしていくと $h(s,t)$ は X の中に連続曲線を描く．その曲線は x_0 を基点とするループである，というのが条件(ii)である．($h(0,t)=x_0$ だから‘出発点’は x_0．$h(1,t)=x_0$ だから‘終点’も x_0．) このループを $\varphi_t:[0,1]\longrightarrow X$ と書こう．すなわち $\varphi_t(s)=h(s,t)$．t が0から1まで変化すると，ループ φ_t は段々変形していく．$t=0$ では $\varphi_0=\varphi$，そして $t=1$ の最終段階では $\varphi_1=\phi$ になる，これが条件(ｉ)の意味である．$h:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow X$ を，φ から ϕ への**ホモトピー**(homotopy)という．(図8.3参照)

φ が ϕ にホモトープのとき，記号で $\varphi\simeq\phi$ と書くことにする．この関係は同値関係になる．同値関係になるための3つの条件(第4章§4.1のノート)を確かめてみよう．

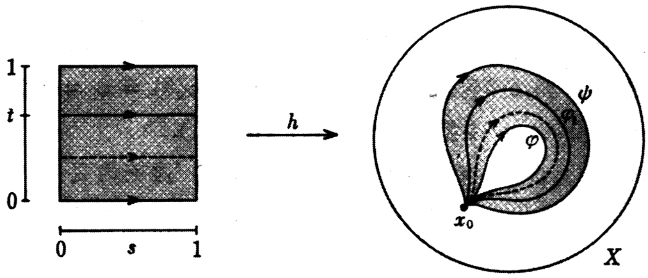


図 8.3

(1)　$\varphi\simeq\varphi$　(全然動かさない‘変形’で φ は φ になる) アタリマエ．

(2)　$\varphi\simeq\phi \Longrightarrow \phi\simeq\varphi$　(‘逆の変形’を考えればよい．)

(3)　φ,ϕ,ξ を X の中の x_0 を基点とするループとするとき，$\varphi\simeq\phi,\ \phi\simeq\xi \Longrightarrow \varphi\simeq\xi$ (‘変形の合成’を考えればよい．)

念のため(3)だけを‘ホモトープ’の定義に基づいて証明しておく．φ から ϕ へのホモトピーを h，ϕ から ξ へのホモトピーを k とする．h,k はともに連続写像 $[0,1]\times[0,1]\longrightarrow X$ である．

新たに写像 $l:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow X$ を

$$l(s,t)=\begin{cases} h(s,2t) & 0\leqq t\leqq 1/2 \\ k(s,2t-1) & 1/2\leqq t\leqq 1 \end{cases}$$

と定義する．$t=1/2$ のとき $h(s,1)=\phi(s)=k(s,0)$ であるから2つの式はつながって，l は連続になる．そして(i) $l(s,0)=h(s,0)=\varphi(s)$，$l(s,1)=k(s,1)=\xi(s)$ を満たす．また(ii) $l(0,t)=(h(0,2t)$ または $k(0,2t-1))=x_0$，$l(1,t)=(h(1,2t)$ または $k(1,2t-1))=x_0$ も満たす．よって $l:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow X$ は，φ から ξ へのホモトピーになって，$\varphi\simeq\xi$ である．これで(3)が証明された．

ホモトープ $\simeq$ という関係は同値関係であることがわかった．すると§4.1のノートにより，

X の中の x_0 を基点とするループ全体の集合は，有限個または無限個の同値類に分かれる：

$$\{X\text{の中の，}x_0\text{ を基点とするループ全体}\} = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \cdots.$$

同値類に分割することの一般論（§4.1，ノート）から，同じ L_i に含まれる2つの φ, ψ は互いにホモトープであり，異なる L_i, L_j に含まれる φ, ψ は互いにホモトープではない．各各の同値類 L_i を**ホモトピー類**とよぶ．ループ φ の属しているホモトピー類 L_i を $[\varphi]$ と書くこともある．ホモトピー類全体の集合を $\pi_1(X, x_0)$ という記号で表わす．すなわち

$$\pi_1(X, x_0) = \{L_0, L_1, L_2, \cdots, L_i, \cdots\}.$$

この集合 $\pi_1(X, x_0)$ に‘ループをつなぐ積’を入れて群にすることができる．それを**基本群**という．

φ, ψ を2つのループとする（いずれも基点は x_0）．**φ, ψ をつないだループ $\varphi\cdot\psi$** とは，まず x_0 から出発して，ループ φ に沿ってまわって x_0 にもどり，次にループ ψ に沿ってまわって再び x_0 にもどるようなループのことである．$\varphi\cdot\psi$ を式で書けば次のようになる．

$$\varphi\cdot\psi(s) = \begin{cases} \varphi(2s) & 0 \leqq s \leqq 1/2 \\ \psi(2s-1) & 1/2 \leqq s \leqq 1. \end{cases}$$

$\varphi \simeq \varphi'$ かつ $\psi \simeq \psi'$ なら $\varphi\cdot\psi \simeq \varphi'\cdot\psi'$ はすぐ確かめられる．φ がループ $\varphi_t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ を通じて φ' に変形し，ψ がループ $\psi_t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ を通じて ψ' に変形するとすれば，$\varphi\cdot\psi$ はループ $\varphi_t\cdot\psi_t$ を通じて $\varphi'\cdot\psi'$ に変形するのである．（詳しい証明は読者にまかせる．）

このことからホモトピー類の間の積が意味をもつ（剰余群 G/H に積を定義したときと同じ論理である）．ループ φ の属するホモトピー類 $[\varphi]$ と，ψ の属するホモトピー類 $[\psi]$ の積 $[\varphi]\cdot[\psi]$ は，$\varphi\cdot\psi$ の属するホモトピー類 $[\varphi\cdot\psi]$ として定義すればよい．こうして $\pi_1(X, x_0)$ に積演算が入った．結合法則は $(\varphi\cdot\psi)\cdot\xi \simeq \varphi\cdot(\psi\cdot\xi)$ を確かめることによってわかる．

始めから終りまで x_0 にとどまっていて動かない‘ループ’を $\tilde{x}_0$ としよう（i.e. 任意の $0 \leqq s \leqq 1$ について $\tilde{x}_0(s) = x_0$）．$\tilde{x}_0$ の属するホモトピー類を $e = [\tilde{x}_0]$ とすれば，e が上の積演算に関する単位元になる．

また，ループ φ を‘逆にたどるループ’を φ^{-1} とすれば，$[\varphi^{-1}]$ が $[\varphi]$ の逆元になる：$[\varphi^{-1}] = [\varphi]^{-1}$．（これを確かめるには，$\varphi\cdot\varphi^{-1} \simeq \tilde{x}_0$ を示せばよい．$\varphi\cdot\varphi^{-1}$ は，‘φ をたどって x_0 に行き，同じ道を逆にたどって x_0 にもどる’ループである．ψ_t を，x_0 から出発して φ をたどり，途中の点 $\varphi(1-t)$ まで行き，そこで折りかえして同じ道を逆にたどって x_0 にもどるループとすれば，ψ_t によって $\varphi\cdot\varphi^{-1}$ は $\tilde{x}_0$ に連続変形する：$\psi_0 = \varphi\cdot\varphi^{-1}$，$\psi_1 = \tilde{x}_0$.）

基本群 $\pi_1(X, x_0)$ はその名の示す通り，トポロジー（ばかりでなく数学の各分野）で大切な役割を果たす群である．

《**例 1**》 D^2 を2次元円板，x_0 をその任意の1点とすれば $\pi_1(D^2, x_0) = \{e\}$：自明群．

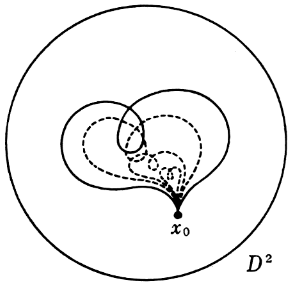


図 8.4

証明は図 8.4 から明らかと思う．D^2 の中のど

んなループも $\tilde{x}_0$ に縮んでしまう．よってホモトピー類は $e=[\tilde{x}_0]$ しかない．

一般に n 次元円板 D^n の基本群 $\pi_1(D^n, x_0)$ は自明群である．

【定義】 $\pi_1(X, x_0)=\{e\}$ であるような弧状連結な図形 X を，**単連結**（1-connected または simply connected）な図形という．

D^n は単連結である．

円周 S^1 の基本群

x_0 を S^1 の任意の点とする．円周 S^1 の基本群は次のようになる．

【定理 8.1】 $\pi_1(S^1, x_0)\cong \boldsymbol{Z}$. x_0 から出発して（適当な向きに）S^1 をちょうど1周して x_0 にもどるループが生成元を表わす．

証明　証明のアイデアは簡単で，ループが S^1 に何回まきつくか，によってホモトピー類が分類できるのである．

これを少し厳密に証明しよう．S^1 を (x, y) 平面上の単位円：$x^2+y^2=1$ と考える．また x_0 は簡単に $x_0=(1,0)\in S^1$ としておく．$f:\boldsymbol{R}\longrightarrow S^1$ を，$f(\theta)=(\cos\theta, \sin\theta)\in S^1$, $-\infty<\theta<\infty$, と定義すれば，f は §3.3 で説明した被覆写像になっている．次の定義をする．

【定義】 T を図形，$\varphi: T\longrightarrow S^1$ を連続写像とする．連続写像 $\tilde{\varphi}: T\longrightarrow \boldsymbol{R}$ が φ の**持ち上げ**である，とは，任意の $x\in T$ について $f(\tilde{\varphi}(x))=\varphi(x)$ が成り立つこと（すなわち $f\circ\tilde{\varphi}=\varphi$ ということ）である．

$\tilde{\varphi}$ がひとつの持ち上げなら $\tilde{\varphi}$ を $\boldsymbol{R}$ の上で 2π の整数倍だけずらした $\tilde{\varphi}+2m\pi$ もすべて φ の持ち上げである．（図 8.5）

連続写像 $\varphi: T\longrightarrow S^1$ の像 $\varphi(T)$ が S^1 の十分小さい範囲（たとえば，円周の4分の1に相当する部分．これをひとつの4分の1円周とよぼう）に入ってしまうなら，φ は $\boldsymbol{R}$ に持ち上げられる．なぜなら，$\varphi(T)$ を含む4分の1円周（開区間に位相同形とする）を U とすると，$f^{-1}(U)$ は $\boldsymbol{R}$ の中の無限個の開区間に分かれる．そのひとつを任意に選んで U_0 とする．$f|U_0: U_0\longrightarrow U$ は同相写像になるから，逆写像 $(f|U_0)^{-1}: U\longrightarrow U_0$ も同相写像である．$\tilde{\varphi}=(f|U_0)^{-1}\circ\varphi: T\longrightarrow \boldsymbol{R}$ とおけば，$\tilde{\varphi}$ が φ の（ひとつの）持ち上げを与えるのである．

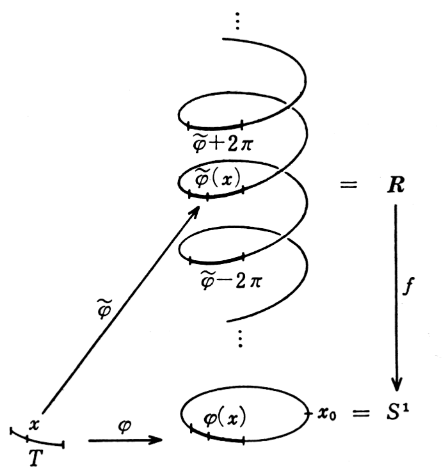


図 8.5　$\tilde{\varphi}$ は φ の持ち上げ

定理 8.1 を証明する第1ステップは，x_0 を基点とする任意のループ $\varphi:[0,1]\longrightarrow S^1$ が連続写像として $\boldsymbol{R}$ に持ち上げられることを示すことである．次の補助定理を準備する．

【補助定理 A】 $[0,1]$ を m 等分して，m 個の小区間 $I_1, I_2, \cdots, I_m$ に分ける．もし m を

十分大にすると，どの小区間 I_i の φ による像 $\varphi(I_i)$ も，それぞれ S^1 のある4分の1円周に含まれてしまう．ただし，φ は与えられたループ $[0,1] \longrightarrow S^1$ である．

補助定理 A の証明は下のノートにまわす．これを仮定して進もう．$\varphi : [0,1] \longrightarrow S^1$ を，x_0 を基点にする任意のループとする．補助定理 A に従って，$[0,1]$ を十分細かく m 等分する．第1の小区間 $[0,1/m]$ をとる．その像 $\varphi([0,1/m])$ は，ある4分の1円周に入るから，$\varphi|[0,1/m] : [0,1/m] \longrightarrow S^1$ は $\tilde{\varphi}_1 : [0,1/m] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ に持ち上げられる．この持ち上げの‘出発点’ $\tilde{\varphi}_1(0)$ は，$x_0 = \varphi(0)$ の f による逆像 $f^{-1}(x_0) = \{\cdots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \cdots\}$ の中のいずれの点にとることもできるが，いま $\tilde{\varphi}_1(0) = 0$ にしておく．

第2の小区間 $\left[\dfrac{1}{m}, \dfrac{2}{m}\right]$ をとる．その像 $\varphi\left(\left[\dfrac{1}{m}, \dfrac{2}{m}\right]\right)$ もある4分の1円周に含まれているので，$\varphi\left|\left[\dfrac{1}{m}, \dfrac{2}{m}\right] : \left[\dfrac{1}{m}, \dfrac{2}{m}\right] \longrightarrow S^1\right.$ は $\boldsymbol{R}$ に持ち上げられる．$\tilde{\varphi}_2 : \left[\dfrac{1}{m}, \dfrac{2}{m}\right] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ をその持ち上げとする．$\tilde{\varphi}_2$ の‘出発点’ $\tilde{\varphi}_2(1/m)$ は $f^{-1}(\varphi(1/m)) = \{\cdots, \tilde{\varphi}_1(1/m)-2\pi, \tilde{\varphi}_1(1/m), \tilde{\varphi}_1(1/m)+2\pi, \cdots\}$ のどの点にもとり得るが，いまは $\tilde{\varphi}_2(1/m) = \tilde{\varphi}_1(1/m)$ ととる．すると $\tilde{\varphi}_1$ と $\tilde{\varphi}_2$ がつながって，$\varphi|[0,2/m] : [0,2/m] \longrightarrow S^1$ の持ち上げ $\tilde{\varphi}_1 \cup \tilde{\varphi}_2 : [0,2/m] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ ができる．

以下同様に小区間ごとに持ち上げていく．その際，新たに持ち上げる小区間の左端が，ひとつ前に持ち上げた小区間の右端につながるようにする．m 個の小区間のすべてについてこのような持ち上げを行なう．最後にそれらをつないで $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \cup \tilde{\varphi}_2 \cup \cdots \cup \tilde{\varphi}_m : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ という φ の持ち上げが得られる．

φ の持ち上げが，$\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}' : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ というように2つあったとしよう．しかもそれらの‘出発点’がともに $0 \in \boldsymbol{R}$ であったとする．そうすると実は，$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'$ でなければならない．なぜなら，任意の $s \in [0,1]$ について $f(\tilde{\varphi}(s)) = \varphi(s) = f(\tilde{\varphi}'(s))$ であるから $\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}'(s)$ は任意の s について 2π の整数倍である．閉区間上の連続関数は $2n\pi$ のようなバラバラに離れた値を2つ以上とることはできない（中間値の定理！）．よって $\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}'(s)$ は一定値である．仮定より $\tilde{\varphi}(0) - \tilde{\varphi}'(0) = 0$．よって常に $\tilde{\varphi}(s) - \tilde{\varphi}'(s) = 0$ でなければならない．

以上で次のことがわかった：“x_0 を基点とする任意のループ $\varphi : [0,1] \longrightarrow S^1$ に対し，$\tilde{\varphi}(0) = 0$ であるような持ち上げ $\tilde{\varphi} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が唯ひとつある”．このような $\tilde{\varphi}$ を**0を出発点とする持ち上げ**とよぼう．

$\tilde{\varphi}$ を，0を出発点とする φ の持ち上げとする．φ がループであっても $\tilde{\varphi} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ はループとは限らず，‘終点’ $\tilde{\varphi}(1)$ は必ずしも0ではない（cf. 図 8.6）．しかし $f(\tilde{\varphi}(1)) = \varphi(1) = x_0$ であるから，$\tilde{\varphi}(1)$ は 2π の整数倍

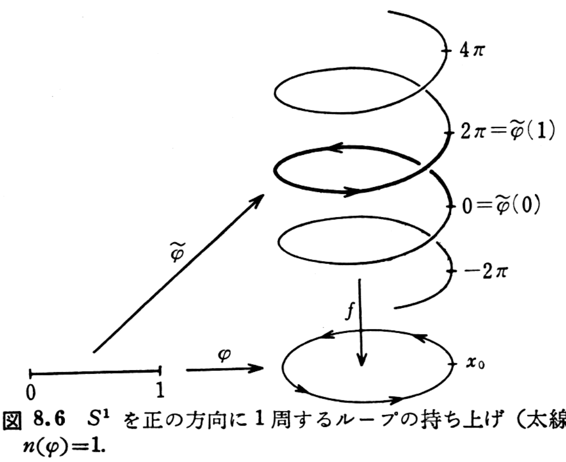


図 8.6　S^1 を正の方向に1周するループの持ち上げ（太線）．$n(\varphi)=1$．

でなければならない．$\tilde{\varphi}(1)=2n\pi$ であるような n のことを，ループ $\varphi:[0,1]\longrightarrow S^1$ の回転数とよび $n(\varphi)$ と表わすことにする．(cf. 再び図 8.6)

定理 8.1 を証明する第2のステップは，$n(\varphi)$ が φ のホモトピー類で決まる，つまり $\varphi\simeq\psi$ なら $n(\varphi)=n(\psi)$，ということを示すことである．次の補助定理を準備する．

【補助定理 B】 $h:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow S^1$ を任意に与えられた連続写像とする．正方形 $[0,1]\times[0,1]$ をタテ，ヨコとも m 等分して m^2 個の小正方形に分ける．もし m を十分大にとれば，どの小正方形の h による像も，それぞれある4分の1円周に含まれる．

この補助定理の証明もノートにまわす．

$h:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow S^1$ を，$\varphi\simeq\psi$ のホモトピーとする．φ を $\tilde{\varphi}:[0,1]\longrightarrow S^1$ に持ち上げておく ($\tilde{\varphi}(0)=0$)．補助定理 B に従って，$[0,1]\times[0,1]$ を十分細かく m^2 等分する．小正方形 $\left[\dfrac{i-1}{m},\dfrac{i}{m}\right]\times\left[\dfrac{j-1}{m},\dfrac{j}{m}\right]$ を I_{ij} と書こう．

第1の小正方形 I_{11} をとる．$h(I_{11})$ はある4分の1円周に含まれるから，$h|I_{11}:I_{11}\longrightarrow S^1$ は $\tilde{h}_{11}:I_{11}\longrightarrow \boldsymbol{R}$ に持ち上がる．ただし，$\tilde{h}_{11}$ は $[0,1/m]\times\{0\}$ において $\tilde{\varphi}$ に一致するようにとる．次に $h|I_{21}:I_{21}\longrightarrow S^1$ を $\tilde{h}_{21}:I_{21}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ に持ち上げる．その際，$\left\{\dfrac{1}{m}\right\}\times\left[0,\dfrac{1}{m}\right]\cup\left[\dfrac{1}{m},\dfrac{2}{m}\right]\times\{0\}$ では $\tilde{h}_{11}$，$\tilde{\varphi}$ に一致するようにしておく．以下同様に，$h(I_{ij})\subset$ (ある4分の1円周) ということを使って，$h|I_{31}$，$h|I_{41},\cdots,h|I_{m1}$，$h|I_{12},h|I_{22},\cdots,h|I_{m2},\cdots,h|I_{1m}$，$h|I_{2m},\cdots,h|I_{mm}$ をこの順に持ち上げていく．最後に全体をつなぎ合わせると，$h:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow S^1$ の持ち上げ $\tilde{h}:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}$ が得られる．

$\tilde{h}$ の構成法から $\tilde{h}(s,0)=\tilde{\varphi}(s)$ である．ホモトピーの定義の条件 (i) によれば $h(s,1)=\psi(s)$．よって $\tilde{\psi}(s)=\tilde{h}(s,1)$ とおくと $\tilde{\psi}$ は ψ の持ち上げである．

$\tilde{\psi}(0)=0$ を示そう．そのため閉区間上の連続関数 $\tilde{h}(0,t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ を考える．$f(\tilde{h}(0,t))=h(0,t)=x_0$ (cf. ホモトピーの定義の条件 (ii)) であるから $\tilde{h}(0,t)$ は 2π の整数倍，よって t によらぬ一定値である (中間値の定理)．したがって $\tilde{\psi}(0)=\tilde{h}(0,1)=\tilde{h}(0,t)=\tilde{h}(0,0)=\tilde{\varphi}(0)=0$ が示せた．

これで，$\tilde{\psi}$ が ψ の0を出発点とする持ち上げであることがわかったから，ψ の回転数 $n(\psi)$ は $\tilde{\psi}(1)=2\pi n(\psi)$ で与えられる．そこで $n(\psi)=n(\varphi)$ を示すには $\tilde{\psi}(1)=\tilde{\varphi}(1)$ さえ示せばよい．上と同じ議論をする．まず連続関数 $\tilde{h}(1,t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ を考える．$f(\tilde{h}(1,t))=h(1,t)=x_0$ (cf. ホモトピーの条件 (ii)) であるから，$\tilde{h}(1,t)$ は 2π の整数倍，よって t によらぬ一定値である (中間値の定理)．したがって $\tilde{\psi}(1)=\tilde{h}(1,1)=\tilde{h}(1,t)=\tilde{h}(1,0)=\tilde{\varphi}(1)$ となる．これで回転数 $n(\varphi)$ が φ のホモトピー類 $[\varphi]$ のみで決まることがわかった．

したがって，$n:\pi_1(S^1,x_0)\longrightarrow\boldsymbol{Z}$ という写像が考えられる．

定理 8.1 の証明の第3ステップは，これが準同型写像になることを示すことである．φ_1,φ_2 を x_0 を基点とする2つのループ，$\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2$ をそれぞれの持ち上げとする．ただし，$\tilde{\varphi}_1(0)=\tilde{\varphi}_2(0)=0$ とする．$\tilde{\varphi}_2$ を $\tilde{\varphi}_1(1)=2\pi\,n(\varphi_1)$ だけずらして $\tilde{\varphi}_2+2\pi\,n(\varphi_1)$ を考える．これも φ_2 の持ち上げであるが，その出発点は $\tilde{\varphi}_2(0)+2\pi\,n(\varphi_1)=2\pi\,n(\varphi_1)$，よって $\tilde{\varphi}_1$ の‘終点’$\tilde{\varphi}_1(1)=2\pi\,n(\varphi_1)$ に一致している．そこでこれらをつないで

$$\tilde{\varphi}(s) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(2s) & 0 \leqq s \leqq 1/2 \\ \tilde{\varphi}_2(2s-1) + 2\pi\, n(\varphi_1) & 1/2 \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

とおけば，$\tilde{\varphi}$ は 0 を出発点とする $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ の持ち上げになる．

これから $2\pi\, n(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \tilde{\varphi}(1) = \tilde{\varphi}_2(1) + 2\pi\, n(\varphi_1) = 2\pi\, n(\varphi_2) + 2\pi\, n(\varphi_1)$ となって，$n(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = n(\varphi_1) + n(\varphi_2)$ がいえた．

S^1 を正の方向に一定の速さで一周するループ φ_1 をとれば $n(\varphi_1) = 1$ が容易にわかる (cf. 図 8.6). $n(\varphi_1 \cdot \varphi_1) = n(\varphi_1) + n(\varphi_1) = 2$, $n(\varphi_1 \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_1) = 3$, etc, $\cdots$ から $n : \pi_1(S^1, x_0) \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ が全射であることがわかる．

定理 8.1 の証明の最終ステップは $n : \pi_1(S^1, x_0) \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ が単射であること，すなわち $n(\varphi) = n(\psi)$ なら $\varphi \simeq \psi$ となること，の証明である．$\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ を φ, ψ の持ち上げ ($\tilde{\varphi}(0) = 0$, $\tilde{\psi}(0) = 0$ であるもの) とする．$n(\varphi) = n(\psi)$ であるから $\tilde{\varphi}(1) = \tilde{\psi}(1)$ でなければならない．$\tilde{\varphi}_t : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $\tilde{\varphi}_t(s) = (1-t)\tilde{\varphi}(s) + t\tilde{\psi}(s)$ とおく ($s \in [0,1]$). $\tilde{\varphi}_t$ は $[0,1]$ 上の連続関数で，$\tilde{\varphi}_t(0) = 0$, $\tilde{\varphi}_t(1) = \tilde{\varphi}(1) = \tilde{\psi}(1)$ である．$\varphi_t = f(\tilde{\varphi}_t) : [0,1] \longrightarrow S^1$ とおけば，φ_t は x_0 を基点とするループで，$\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$. よって $\varphi \simeq \psi$ が証明できた．($h(s,t) = \varphi_t(s)$ がその間のホモトピーを与える．) 定理 8.1 の証明終り．

●ノート．補助定理 A, B の証明

A, B どちらも証明は全く同じである．補助定理 B だけを証明しよう．

背理法を使う．定理を否定して，どんな m についても，$[0,1] \times [0,1]$ を m^2 等分した小正方形 $I_{11}{}^{(m)}, I_{12}{}^{(m)}, \cdots, I_{m-1,m}{}^{(m)}, I_{m,m}{}^{(m)}$ の中に，$h(I_{ij}{}^{(m)})$ が 4 分の 1 円周に入らない $I_{ij}{}^{(m)}$ があると仮定する．

$h(I_{ij}{}^{(m)})$ が 4 分の 1 円周に入らないから，$I_{ij}{}^{(m)}$ の中に 2 点 a_m, b_m があって，$h(a_m)$ と $h(b_m)$ の円弧に沿って計った長さ $\widehat{h(a_m)h(b_m)}$ は $\pi/2$ 以上である．すなわちどんな m についても，次の 2 性質をもつ $a_m, b_m \in [0,1] \times [0,1]$ がある：① $d(a_m, b_m) \leqq \sqrt{2}/m$, ② $\widehat{h(a_m)h(b_m)} \geqq \pi/2$.

点列 $\{a_m\}, \{b_m\}$ を考える．正方形 $[0,1] \times [0,1]$ はコンパクトだから，$\{a_m\}$ から収束する部分点列 $\{a_{i(n)}\}$ が選び出せる．$a_0 = \lim_{n \to \infty} a_{i(n)}$ とおく．また対応する番号をもつ $\{b_m\}$ の部分点列 $\{b_{i(n)}\}$ からも収束する部分点列 $\{b_{j(k)}\}$ が選び出せる．$b_0 = \lim_{k \to \infty} b_{j(k)}$ とおけば，性質 ① から $a_0 = b_0$ である．h は連続だから，$\lim_{k \to \infty} h(a_{j(k)}) = h(a_0) = h(b_0) = \lim_{k \to \infty} h(b_{j(k)})$. これは性質 ② $\widehat{h(a_{j(k)})h(b_{j(k)})} \geqq \pi/2$ に矛盾する．証明終り．

補助定理 A, B は，コンパクトな図形からの連続写像は一様連続である，という定理の特別の場合である．(cf. 高木 [7])

§8.2 基本群の不変性

弧状連結な図形 X, Y にそれぞれ基点 x_0, y_0 をとる．$f : X \longrightarrow Y$ は連続写像で $f(x_0) =$

y_0 なるものとする．X の中に，x_0 を基点とする任意のループ $\varphi:[0,1]\longrightarrow X$ を描く．このループを f で写して，$f\circ\varphi:[0,1]\longrightarrow Y$ を考えれば，これは y_0 を基点とする Y のループになる（図 8.7）．x_0 を基点とする2つのループ φ と ψ が互いにホモトープ $\varphi\simeq\psi$ であれば，それらを f で写した $f\circ\varphi$ と $f\circ\psi$ もホモトープ $f\circ\varphi\simeq f\circ\psi$ になる．（h が φ から ψ へのホモトピーなら $f\circ h$ が $f\circ\varphi$ から $f\circ\psi$ へのホモトピーになる．）

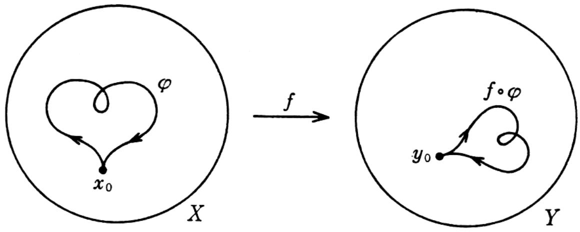


図 8.7

こうして，ホモトピー類 $[\varphi]$ に，ホモトピー類 $[f\circ\varphi]$ を対応させることができて，写像 $\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,y_0)$ が決まる．この写像を $f_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,y_0)$ と書こう．f_* は群の間の準同型写像になる．実際，2つのループの積 $\varphi\cdot\psi$ を f で写したものは，$f\circ\varphi$ と $f\circ\psi$ の積 $(f\circ\varphi)\cdot(f\circ\psi)$ になるからである．

また Z を第3の弧状連結な図形，z_0 を Z の基点とし，$g:Y\longrightarrow Z$ を $g(y_0)=z_0$ であるような連続写像とすれば，上と同じ議論で準同型写像 $g_*:\pi_1(Y,y_0)\longrightarrow\pi_1(Z,z_0)$ が導かれる．このとき，合成 $g\circ f:X\longrightarrow Z$ によって導かれる準同型写像 $(g\circ f)_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Z,z_0)$ は，準同型写像 f_*, g_* の合成 $g_*\circ f_*$ に等しい：$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$.

これから大切な事がわかる．**基本群の位相不変性**である．X, Y を上のような図形とし，$f:X\longrightarrow Y(f(x_0)=y_0)$ を同相写像と仮定する．すると，f も f^{-1} もともに連続であるから，

$$f_*\circ(f^{-1})_*=(f\circ f^{-1})_*=(\mathrm{id})_*=\mathrm{id},\qquad (f^{-1})_*\circ f_*=(f^{-1}\circ f)_*=(\mathrm{id})_*=\mathrm{id}.$$

よって $f_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,y_0)$ と $(f^{-1})_*:\pi_1(Y,y_0)\longrightarrow\pi_1(X,x_0)$ は群の間の写像として互いに逆になる．これは f_* が同型写像であるということである：$\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,y_0)$．互いに位相同形な図形は同型な基本群をもつのである．

実は，基本群は**ホモトピー不変性**とよばれるさらに強い不変性をもっている．

前のように X, Y を弧状連結とし，基点 x_0, y_0 をもつものとする．$f, g:X\longrightarrow Y$ を2つの連続写像とする（ただし $f(x_0)=y_0$, $g(x_0)=y_0$）．

【定義】 次の条件 (i), (ii) を満たす連続写像 H: $X\times[0,1]\longrightarrow Y$ が存在するとき，f は g に，**基点を保ったままホモトープ**であるという．

(i)　$H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$　　（任意の $x\in X$ について）

(ii)　$H(x_0,t)=y_0$　　（任意の t について）

この定義がループの間のホモトピーの拡張であることは明らかだろう．記号も同じく $f\simeq g$ と書くことにする．写像 f を少しずつ連続的に変形していけば g になるというのである．ひとつ固定した t に対し，$f_t(x)=H(x,t)$ とおけば，$f_t:X\longrightarrow Y$ が f から g への連続変形の中間段階を与えている．H を，$f\simeq g$ の**ホモトピー**とよぶ．

【補助定理】 $f\simeq g$ であれば，$f_*=g_*$ である．

証明 任意の $[\varphi]\in\pi_1(X,x_0)$ について $f_*([\varphi])=g_*([\varphi])$ がいえればよい．$\varphi:[0,1]\longrightarrow X$ を x_0 を基点とする任意のループとし，$H:X\times[0,1]\longrightarrow Y$ を $f\simeq g$ のホモトピーとする．$h:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow Y$ を，$h(s,t)=H(\varphi(s),t)$ によって定義する．h が $f\circ\varphi\simeq g\circ\varphi$ の間のホモトピーを与える．（ループの間のホモトピーの定義の条件 (i),(ii) を確かめてみること．）したがって $f_*([\varphi])=[f\circ\varphi]=[g\circ\varphi]=g_*([\varphi])$ がわかった．証明終り．

さて，位相同形より‘大雑把な’ホモトピー同値という概念が次のように定義される．X,Y は弧状連結で，基点 x_0,y_0 をもつ図形とする．

【定義】 $f:X\longrightarrow Y$ を連続写像で $f(x_0)=y_0$ となるもの，$g:Y\longrightarrow X$ を連続写像で $g(y_0)=x_0$ となるものとする．合成 $g\circ f:X\longrightarrow X$ が，X から X への写像として id_X にホモトープ（$g\circ f\simeq\mathrm{id}_X$）であり，また $f\circ g:Y\longrightarrow Y$ が Y から Y への写像として id_Y にホモトープ（$f\circ g\simeq\mathrm{id}_Y$）であるとき，$X$ と Y とは互いに**ホモトピー同値**であるといい，f,g を**ホモトピー同値写像**とよぶ（$\mathrm{id}_X,\mathrm{id}_Y$ はそれぞれ X,Y の恒等写像）．また f と g とは互いに**ホモトピー的に逆**であるという．X と Y がホモトピー同値であることを $X\simeq Y$ と書き表わす．X,Y が位相同形なら両者はホモトピー同値である．

‘ホモトピー同値’の直観的イメージは，初めのうちはなかなかつかみにくいと思うが，一応形式的に理解して先に進んでほしい．

さて，$f:X\longrightarrow Y$，$g:Y\longrightarrow X$ をホモトピー同値写像とし互いにホモトピー的に逆であるとする．f_*,g_* を基本群の間の準同型写像とすれば，$g\circ f\simeq\mathrm{id}_X$，$f\circ g\simeq\mathrm{id}_Y$ であるから，補助定理によって，

$$g_*\circ f_*=(g\circ f)_*=(\mathrm{id}_X)_*=\mathrm{id},\qquad f_*\circ g_*=(f\circ g)_*=(\mathrm{id}_Y)_*=\mathrm{id}.$$

したがって f_*,g_* は同型写像でなければならない．これから次の定理を得た．基本群のホモトピー不変性である．

【定理 8.2】 $f:X\longrightarrow Y$ がホモトピー同値写像なら，f から導かれた準同型写像 $f_*:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,y_0)$ は同型写像である．

ホモトピー同値の直観的イメージはつかみにくいが，その特別の場合である変形レトラクトの概念はわかりやすい．しかもなかなか有用である．次にそれを定義しよう．

【定義】 X を弧状連結な図形，R を X の部分図形（$\neq\emptyset$）でやはり弧状連結なものとする．次の条件 (i),(ii) を満たす連続写像 $H:X\times[0,1]\longrightarrow X$ が存在するとき，R を X の**変形レトラクト** (deformation retract) とよぶ．

(i) $H(x,0)=x$，$H(x,1)\in R$ （任意の $x\in X$ について）

(ii) 任意の $t\in[0,1]$ と任意の $x\in R$ について $H(x,t)=x$.

レトラクトとは‘収縮’という意味であるが，この気分は次のように考えるとよくわかる．任意に固定した $t\in[0,1]$ に対し，連続写像 $r_t:X\longrightarrow X$ を $r_t(x)=H(x,t)$ と定める．すると上の条件 (i) によって，$t=0$ のとき $r_0=\mathrm{id}_X$，$t=1$ のとき $r_1(X)\subset R$ である．すなわち，r_t $(0\leqq t\leqq 1)$ という連続的変形によって X の恒等写像 $\mathrm{id}_X:X\longrightarrow X$ が，R の中への写像 $r_1:X\longrightarrow R$ に変形して（縮んで）しまう．しかも変形の中間段階の写像 r_t は，

任意の R の点 x について $r_t(x)=x$ (条件(ii)). r_t は R の点を全く動かさない.

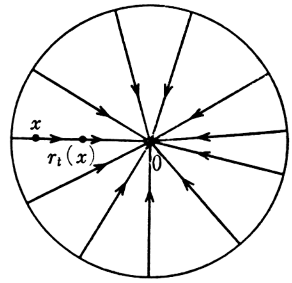


図 8.8

《例 1》 D^n を n 次元円板, 0をその中心とする. 0は D^n の変形レトラクトである (図 8.8).

D^n の点 x を $(1-t)x$ に写す写像を $r_t(x)$ とすればよい. (ただし線分 $0x$ 上, 0から x までの距離を $(1-t)$ 倍に縮めた距離にある点を $(1-t)x$ と書いた.) $H: D^n\times[0,1]\longrightarrow D^n$ で書けば $H(x,t)=(1-t)x$.

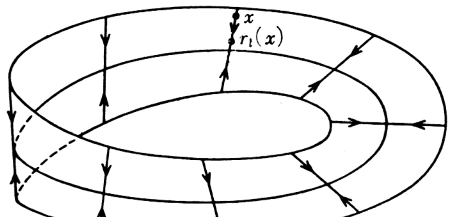


図 8.9

《例 2》 メビウスの帯 M の中心線の円周は M の変形レトラクトである (図 8.9).

帯の幅を $(1-t)$ 倍に縮める写像を $r_t: M\longrightarrow M$ とすればよい.

《例 3》 2次元円板 D^2 から, 中心点0を除いた図形を X とする. ∂D^2 は X の変形レトラクトである.

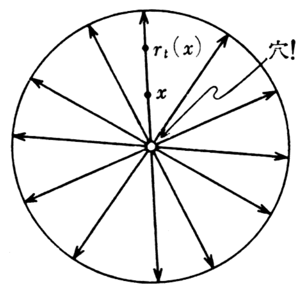


図 8.10

極座標で (ρ,θ) と表わされる点 (ρ は0からの距離, θ は偏角) を, $((1-t)\rho+t,\theta)$ に写す写像を $r_t: X\longrightarrow X$ とすればよい (図 8.10).

R が X の変形レトラクトであれば R と X とはホモトピー同値である. 実際, $i: R\longrightarrow X$ を包含写像, $r_1: X\longrightarrow R$ を $r_t: X\longrightarrow X$ で $t=1$ とおいた写像とする. 変形レトラクトの定義から $i\circ r_1\simeq \mathrm{id}_X$. また, 条件 (ii) から $r_1\circ i=\mathrm{id}_R$. したがって $R\simeq X$ がわかった. とくに定理 8.2 から, X とその変形レトラクト R の基本群は同型である.

例1から, 円板 D^n は1点とホモトピー同値である. 1点とホモトピー同値な図形は**可縮**であるという. D^n は可縮である. またユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ も可縮であることが示せる. 可縮な図形の基本群は自明群である.

例2から, メビウスの帯の基本群 $\pi_1(M,x_0)$ は $\pi_1(S^1,x_0)$ と同型である (x_0 は中心線上の任意の点): $\pi_1(M,x_0)\cong\boldsymbol{Z}$.

例3からも同様に $\pi_1(X,x_0)\cong\boldsymbol{Z}$ (x_0 は ∂D^2 上の任意の点).

弧状連結な図形 X の基本群は, 基点 x_0 をどこにとっても同型である. x_0, x_1 を X の2つの基点とする. x_0 と x_1 を結ぶ連続曲線 l をひとつとり, 固定する. x_1 を基点とする任意のループ φ に対し, 'x_0 を出発し l に沿って x_1 に達し, φ をめぐり, 再び l に沿って逆向きに x_0 にもどるループ' を対応させると $l_*: \pi_1(X,x_1)\longrightarrow\pi_1(X,x_0)$ が得られる. 同様に, l を逆にたどって $(l^{-1})_*: \pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(X,x_1)$ も定義される. l_* と $(l^{-1})_*$ とが互いに逆の同型写像になるのである.

このことから例2, 例3の基点は, 中心線や境界 ∂D^2 の上に限らず, どこにとっても $\pi_1(M, x_0) \cong \boldsymbol{Z}$, $\pi_1(X, x_0) \cong \boldsymbol{Z}$ であることがわかる.

§8.3 閉曲面の基本群

実際に与えられた図形の基本群を, 定義通りに直接計算することはあまり簡単でない. (§8.1 の $\pi_1(S^1, x_0)$ の計算を見よ!) 実用上は, 次のファン・カンペン (van Kampen) の定理を応用するのが便利である. 簡単のため, 図形はすべて多面体であるとする.

X, Y を多面体とし, $X \cap Y$ は X, Y 共通の部分多面体とする. $X, Y, X \cap Y$ がすべて (弧状) 連結であるとき, $\pi_1(X \cup Y, x_0)$, $\pi_1(X, x_0)$, $\pi_1(Y, x_0)$, $\pi_1(X \cap Y, x_0)$ の関係を述べるのがファン・カンペンの定理である (x_0 は $X \cap Y$ の任意の基点). ファン・カンペンの定理を一般的な形に述べるためには, 群の融合積 (amalgamated product) を説明しなければならない. ここではその余裕がないので, 2つの特別な場合に分けて定理を述べることにする. '特別' とはいっても, この2つだけでかなり多くの場合がカバーできる.

【ファン・カンペンの定理 I】 X, Y を上のような多面体とする. もし $\pi_1(X \cap Y, x_0) \cong \{e\}$ なら, $\pi_1(X \cup Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, x_0)$ (**自由積**) である.

群の自由積を説明しよう. G, H を群とする. G の要素と H の要素を任意の順序で有限個並べた列を **G と H の語**とよぶことにする. たとえば $g_1g_2h_1g_3h_2$ ($g_i \in G, h_j \in H$) は5つの '文字' を使った語である. G と H の語全体の集合に次の自然な規約を導入する. ① ひとつの語の中で g_1g_2 というように G の要素が隣り合って並んでいるとき, それを G の中での積 $g_1 \circ g_2$ でおきかえてよい. 例. $h_1g_1g_2 = h_1g_1 \circ g_2$ (左辺は '3文字' の語. 右辺は '2文字' の語) ② H についても同様に, h_1h_2 という部分を H の中の積 $h_1 \circ h_2$ でおきかえてよい.

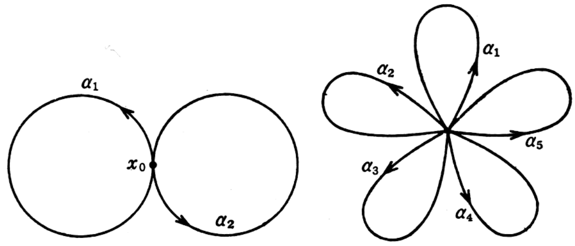
この2つ規約の下に, G と H の語全体が '並べてくっつける' 積に関して群をなす (cf. §7.2). これを G と H の**自由積**とよぶ. 記号で $G * H$ または $H * G$ と書く.

《例 1》 $G = F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $H = F(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ (ともに自由群) のとき, $G * H = F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$.

《例 2》 S^1 の花束 (bouquet). 有限個 (たとえば n 個) の S^1 を1点でくっつけた図形を, n 個の S^1 の花束という (図 8.11). 記号で $S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1$ (n 個) と書き表わす. 共通点 x_0 を基点として, この図形の基本群を求めよう.

まず $n = 2$ の場合 (図 8.11(a)). 2つの S^1 の共通部分は1点 x_0 であるからファン・カンペンの定理 I が使えて

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) * \pi_1(S^1, x_0).$$



(a) 2つの S^1 の花束　(b) 5個の S^1 の花束

図 8.11

要するに，$S^1 \vee S^1$ のループ φ は左右の S^1 をどんな順序でどんなふうにまわるかでホモトピー類が決まるのである．$\pi_1(S^1, x_0) \cong \boldsymbol{Z}$ を無限巡回群 $F(a)$ に同一視する（cf. §7.2）．花束 $S^1 \vee S^1$ の左の S^1 の生成元を α_1，右の S^1 の生成元を α_2 とすればそれぞれ $\pi_1(S^1{}_{左}, x_0) \cong F(\alpha_1)$，$\pi_1(S^1{}_{右}, x_0) \cong F(\alpha_2)$．よって

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong F(\alpha_1) * F(\alpha_2) = F(\alpha_1, \alpha_2).$$

同様に S^1 がいくつあっても，$\pi_1(S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1, x_0) \cong F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$（自由群）である．

《例 3》　図 8.12 のバンドつき円板は§6.4 の標準形の記号では $Y(0,1)$ と書かれたものである(図6.21 の図形と同じ)．$Y(0,1)$ は $S^1 \vee S^1$ を変形レトラクトとして含んでいる．よって $\pi_1(Y(0,1), x_0) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong F(\alpha_1, \beta_1)$.

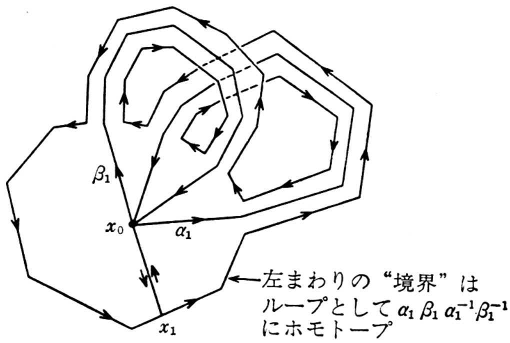


図 8.12

《例 4》　§6.4 の標準形 $Y(0, q)$ は，$Y(0,1)$ を次々に境界上の PL 弧でくっつけていったものである．したがってファン・カンペンの定理 I を逐次応用して $\pi_1(Y(0,q), x_0) \cong F(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_q, \beta_q)$ を得る．ここに x_0 は $Y(0,q)$ の任意の点．

《例 5》　前の§の例2で，メビウスの帯の基本群 $\cong \boldsymbol{Z} \cong F(a)$ がわかった．よって上の例4と同じ理由で，§6.4 の標準形 $Y(p,0)$ の基本群は $\pi_1(Y(p,0), x_0) \cong F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)$ である．

【ファン・カンペンの定理 II】　連結な多面体 Y に，2次元円板 Δ^2 を境界 $\partial\Delta^2$ に沿ってはりつけて $Y \cup \Delta^2$ を作る．$Y \cap \Delta^2 = \partial\Delta^2 = \Sigma^1$ とし，x_0 を Σ^1 の任意の点とする．そのとき，$\pi_1(Y \cup \Delta^2, x_0) \cong \pi_1(Y, x_0)/(s)$ が成り立つ．ここに，s は Σ^1 というループの属する $\pi_1(Y, x_0)$ のホモトピー類，(s) は s によって（正規部分群として）生成される $\pi_1(Y, x_0)$ の部分群である（図 8.13）．

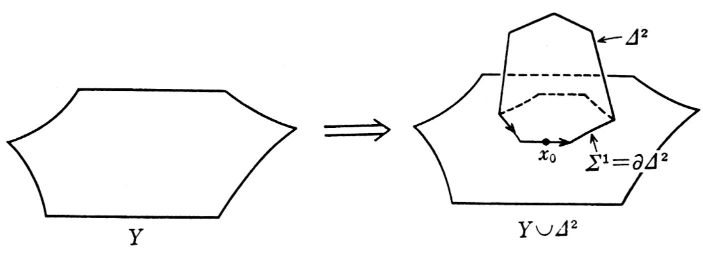


図 8.13

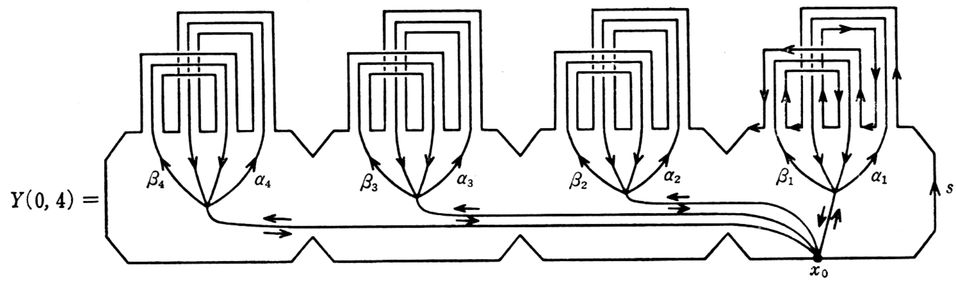
この定理の直観的内容は簡単である．2次元円板 Δ^2 を Σ^1 に沿ってはりつけることによって，Σ^1 という Y のループが，Δ^2 の中で（したがって $Y \cup \Delta^2$ の中で）1点に縮んでしまい，$\pi_1(Y, x_0)$ の要素 s は $\pi_1(Y \cup \Delta^2, x_0)$ の中では単位元 e に同一視されることになるのである．

閉曲面の基本群

$Y(0,q)$ を例 4 で調べた標準形とする．§6.4 で示したように，$X(0,q)$ というタイプの標

準的閉曲面は，$X(0,q)=Y(0,q)\cup\varDelta^2$ であった．ここに $Y(0,q)\cap\varDelta^2=\partial Y(0,q)=\partial\varDelta^2\cong\Sigma^1$．ファン・カンペンの定理 II を応用するため，$Y(0,q)$ の中で‘境界’$\partial Y(0,q)$ というループの表わすホモトピー類を求めてみよう．

まず，$q=1$ の場合．図 8.12 でみるように，$s=\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}$ である．$q>1$ の場合は，これらの積に等しい（図 8.14）．



（$\partial Y(0,4)$を左まわりにたどってみると）$=s=(\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1})(\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1})(\alpha_3\beta_3\alpha_3^{-1}\beta_3^{-1})(\alpha_4\beta_4\alpha_4^{-1}\beta_4^{-1})$

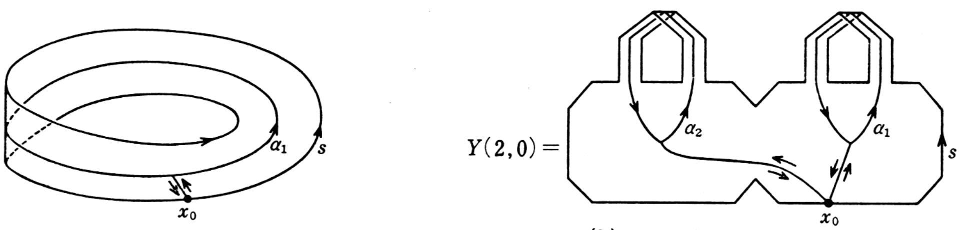
図 8.14

ファン・カンペンの定理 II を使って次の結果が得られる：

$$
\begin{aligned}
\pi_1(X(0,q),x_0)&\cong\pi_1(Y(0,q),x_0)/(s)\\
&\cong F(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_q,\beta_q)/(\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\cdots\alpha_q\beta_q\alpha_q^{-1}\beta_q^{-1})\\
&\cong\langle\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_q,\beta_q\mid\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\cdots\alpha_q\beta_q\alpha_q^{-1}\beta_q^{-1}=e\rangle
\end{aligned}
$$

最後の項が基本群 $\pi_1(X(0,q),x_0)$ の表示である（$q\geqq 1$）．

同様に $X(p,0)$ というタイプの標準的閉曲面の基本群は $Y(p,0)$ の基本群から求められる．$X(p,0)=Y(p,0)\cup\varDelta^2$，$Y(p,0)\cap\varDelta^2=\partial Y(p,0)=\partial\varDelta^2(\cong\Sigma^1)$ に注意する．前と同様に，$Y(p,0)$ の中で，$\partial Y(p,0)$ というループの表わすホモトピー類 s を求める．まず $p=1$ の場合は図 8.15 (a) でみるように $s=\alpha_1^2$ である．$p>1$ の場合にはこれらの積になる（図 8.15 (b)）．



(a)　　(b)　$s=\alpha_1^2\alpha_2^2$

図 8.15

ファン・カンペンの定理 II を使って次の結果が得られる．

$$
\begin{aligned}
\pi_1(X(p,0),x_0)&\cong\pi_1(Y(p,0),x_0)/(s)\\
&\cong F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)/(\alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_p^2)\\
&=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\mid\alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\alpha_p^2=e\rangle
\end{aligned}
$$

最後の項が基本群 $\pi_1(X(p,0),x_0)$ の表示である．

球面 $\Sigma^2 = X(0,0)$ がまだ残っている．Σ^2 は2つの円板をその境界に沿ってはり合わせたもの $\Delta^2 \cup \Delta^2$ と考えられる．$\pi_1(\Delta^2, x_0) \cong \{e\}$ であるから $\Sigma^1 = \Delta^2 \cap \Delta^2$ の属する $\pi_1(\Delta^2, x_0)$ のホモトピー類も e しかない．よってファン・カンペンの定理 II から

$$\pi_1(\Sigma^2, x_0) \cong \pi_1(\Delta^2, x_0)/(e) = \{e\}/(e) = \{e\}.$$

よって，Σ^2 は単連結である．

上で求めた $\pi_1(X(0,q), x_0)$ と $\pi_1(X(p,0), x_0)$ の特別の場合として，$\pi_1(T^2, x_0)$, $\pi_1(P^2, x_0)$ を考えてみよう．

トーラスの基本群

標準形の記号では $T^2 = X(0,1)$ であった．よって $\pi_1(T^2, x_0) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = e \rangle$．ここに現われた関係 $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = e$ は両辺に右から $\beta\alpha$ を掛けることによって $\alpha\beta = \beta\alpha$ と書きなおせる．$\alpha\beta = \beta\alpha$ はまた $\alpha^{-1}\beta = \beta\alpha^{-1}, \alpha\beta^{-1} = \beta^{-1}\alpha$, $\alpha^{-1}\beta^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$ などとも書きなおせる．($\alpha\beta = \beta\alpha$ の両辺に左から α^{-1} を掛けて，$\beta = \alpha^{-1}\beta\alpha$．この両辺に右から α^{-1} を掛けて $\beta\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\beta$．他の等式も同様にして得られる．) これらの等式から $\pi_1(T^2, x_0)$ は可換群（アーベル群）であることがわかる．

α^n, β^m ($n, m \in \boldsymbol{Z}$) の可換性により，α, β の任意の語は $\alpha^k\beta^l$ という形にまとめられる．例．$\alpha^3\beta^{-1}\alpha\beta^2 = \alpha^3\alpha\beta^{-1}\beta^2 = \alpha^4\beta$．また $\pi_1(T^2, x_0)$ には，可換性以外には何の関係も入っていないから，$\alpha^k\beta^l = \alpha^m\beta^n$ となるための必要十分条件は $k = m$, $l = n$ である．積は $(\alpha^k\beta^l)(\alpha^m\beta^n) = \alpha^{k+m}\beta^{l+n}$ で与えられる．このような群を，α, β を生成元とする**階数2の自由アーベル群**とよぶ．

生成元 α, β は図 8.12 のループ α, β の属するホモトピー類である．それらはトーラスの上では図 8.16 の位置にある．このことは図 6.24 (a) に示された変形をたどってみれば容易にわかる．

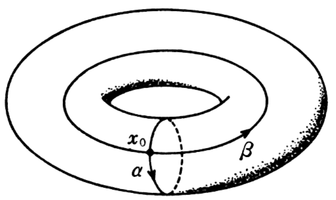


図 8.16

なお，閉曲面 $X(0,q) = T^2 \# \cdots \# T^2$ (q 個, $q \geqq 0$) の基本群は，$q \geqq 2$ のとき可換でない（非可換である）．これから，閉曲面 $X(0,q)$ のオイラー標数と基本群の間の興味深い対応関係が導かれる．

$\chi > 0\,(=2) \Leftrightarrow$ 自明群（Σ^2 の場合）

$\chi = 0 \qquad\Leftrightarrow$ 自明でない可換群（T^2 の場合）

$\chi < 0 \qquad\Leftrightarrow$ 非可換（$q \geqq 2$）

類似の対応関係が弧状連結な1次元多面体についても存在する：

$\chi > 0\,(=1) \Leftrightarrow$ 自明群（樹木の場合）

$\chi = 0 \qquad\Leftrightarrow \boldsymbol{Z}$（もちろん可換）

$\chi < 0 \qquad\Leftrightarrow$ 階数2以上の自由群（非可換）

オイラー標数という簡単な不変量が，本質を巧みに捉えていることがわかると思う．オイラー標数と基本群のこのような関係は，‘向きづけ不可能な’閉曲面や，3次元以上の多様体につ

いては，これほどはっきりしていない．

射影平面の基本群

標準形の記号では $P^2=X(1,0)$ である．これから $\pi_1(P^2,x_0)\cong\langle\alpha\,|\,\alpha^2=e\rangle$．§7.2 の例9によれば，$\langle\alpha\,|\,\alpha^2=e\rangle\cong\boldsymbol{Z}_2$．結局 $\pi_1(P^2,x_0)\cong\boldsymbol{Z}_2$．

閉曲面 $X(p,0)=P^2\#P^2\#\cdots\#P^2$（$p$ 個）のうち，可換な基本群をもつものは P^2 だけである．

閉曲面の基本群を定理の形にまとめておこう．

【定理 8.3】 閉曲面の基本群は次の通りである（x_0 は適当な基点）．

（a） $\pi_1(\Sigma^2,x_0)\cong\{e\}$

（b） $q\geqq 1$ のとき，$\pi_1(X(0,q),x_0)\cong\langle\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_q,\beta_q\,|\,\alpha_1\beta_1\alpha_1{}^{-1}\beta_1{}^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2{}^{-1}\beta_2{}^{-1}\cdots\alpha_q\beta_q\alpha_q{}^{-1}\beta_q{}^{-1}=e\rangle$

（c） $p\geqq 1$ のとき，$\pi_1(X(p,0),x_0)\cong\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\,|\,\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2\cdots\alpha_p{}^2=e\rangle$

補足 $X(0,q)$ の基本群の生成元 $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_q,\beta_q$ は図 8.17 にあるようなループで表わされる．（図 8.16 も参照せよ．）

ファン・カンペンの定理の詳しい証明を与える余裕がなかったが，[8]，[15] 等を参照してほしい．

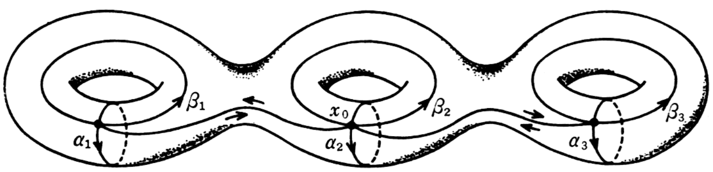


図 8.17 $q=3$, $T^2\#T^2\#T^2$

§8.4 基本群の可換化

定理 8.3 で与えた閉曲面の基本群は実はどれも互いに同型ではない．しかし，与えられた群の表示からそのことを直接証明するのは少しやっかいである．一般に2つの群 G と H が同型か否かを判定するには，まずそれらを可換化してみるのがてっとり早い．それは群の構造の第1近似のようなものである．

群 G の可換化とは，G のすべての要素が互いに可換になるように新しい関係を導入して G を可換群にしてしまうことである．可換化は通常次のように定式化される．

G を任意の群とする．a,b を G の2要素とし，$a\circ b\circ a^{-1}\circ b^{-1}$ という積を考える．これを $[a,b]$ という記号で表わし，a と b の**交換子**とよぶ．G の中で，a と b が可換なら（すなわち $a\circ b=b\circ a$ なら），交換子は $[a,b]=a\circ b\circ a^{-1}\circ b^{-1}=b\circ a\circ a^{-1}\circ b^{-1}=b\circ b^{-1}=e$ となることに注意しよう．逆に $[a,b]=a\circ b\circ a^{-1}\circ b^{-1}=e$ なら $a\circ b=b\circ a$ であることも明らかである．交換子 $[a,b]$ は 'a と b がどの程度可換か' を表わしている．G を可換化するにはすべての交換子を単位元に同一視するような新たな関係を G に入れればよい．

単位元 e は G のすべての要素と可換だから，$[e,a]=e$．また $(a\circ b\circ a^{-1}\circ b^{-1})^{-1}=b\circ a\circ$

$b^{-1}\circ a^{-1}$ だから $[a,b]^{-1}=[b,a]$. さらに $c^{-1}\circ[a,b]\circ c=[c^{-1}\circ a\circ c, c^{-1}\circ b\circ c]$ がわかる.（なぜなら，$c^{-1}\circ(a\circ b\circ a^{-1}\circ b^{-1})\circ c=c^{-1}\circ a\circ(c\circ c^{-1})\circ b\circ(c\circ c^{-1})\circ a^{-1}\circ(c\circ c^{-1})\circ b^{-1}\circ c=(c^{-1}\circ a\circ c)\circ(c^{-1}\circ b\circ c)\circ(c^{-1}\circ a^{-1}\circ c)\circ(c^{-1}\circ b^{-1}\circ c)=(c^{-1}\circ a\circ c)\circ(c^{-1}\circ b\circ c)\circ(c^{-1}\circ a\circ c)^{-1}\circ(c^{-1}\circ b\circ c)^{-1}=[c^{-1}\circ a\circ c, c^{-1}\circ b\circ c]$ だから.）

さて，G の中の‘有限個の交換子の積’全体のなす部分集合を $[G,G]$ という記号で表わす. $[G,G]$ の要素は $[a_1,b_1]\circ[a_2,b_2]\circ\cdots\circ[a_n,b_n]$ という形をしている. このような形の要素の積が再びこのような形の要素になることは明らかである. 逆元も

$$\begin{aligned}([a_1,b_1]\circ[a_2,b_2]\circ\cdots\circ[a_n,b_n])^{-1}&=[a_n,b_n]^{-1}\circ\cdots\circ[a_2,b_2]^{-1}\circ[a_1,b_1]^{-1}\\&=[b_n,a_n]\circ\cdots\circ[b_2,a_2]\circ[b_1,a_1]\end{aligned}$$

であるから，やはりこのような形の要素である. 言いかえれば，$[G,G]$ は G の部分群になっている. さらに，

$$\begin{aligned}c^{-1}\circ([a_1,b_1]\circ[a_2,b_2]\circ\cdots\circ[a_n,b_n])\circ c&=c^{-1}\circ[a_1,b_1]\circ c\circ c^{-1}\circ\cdots\circ c\circ c^{-1}\circ[a_n,b_n]\circ c\\&=[c^{-1}\circ a_1\circ c, c^{-1}\circ b_1\circ c]\circ[c^{-1}\circ a_2\circ c, c^{-1}\circ b_2\circ c]\circ\cdots\circ[c^{-1}\circ a_n\circ c, c^{-1}\circ b_n\circ c]\end{aligned}$$

だから $c^{-1}\circ[G,G]\circ c\subset[G,G]$ もわかる. したがって $[G,G]$ は G の正規部分群である（cf. §7.1，定理 7.2). $[G,G]$ を G の**交換子群**という.

【定義】 剰余群 $G/[G,G]$ を G の**可換化**とよぶ.

G の可換化 $G/[G,G]$ は可換群である. $G/[G,G]$ の中ではすべての交換子が単位元に同一視されているのだからそれは当然であるが，次のように示すこともできる.

$H=[G,G]$ とおく. G/H の要素は $a\circ H, b\circ H$ 等と表わされ，‘積’は $(a\circ H)\cdot(b\circ H)=(a\circ b)\circ H$ で与えられる. G/H の中で交換子 $[a\circ H, b\circ H]$ を考えると，

$$\begin{aligned}(a\circ H)\cdot(b\circ H)\cdot(a\circ H)^{-1}\cdot(b\circ H)^{-1}&=(a\circ H)\cdot(b\circ H)\cdot(a^{-1}\circ H)\cdot(b^{-1}\circ H)\\&=(a\circ b\circ a^{-1}\circ b^{-1})\circ H.\end{aligned}$$

ところが $a\circ b\circ a^{-1}\circ b^{-1}=[a,b]\in H$. よって $[a\circ H, b\circ H]=H$. H は G/H の単位元であるから，これで $(a\circ H)\cdot(b\circ H)=(b\circ H)\cdot(a\circ H)$ がわかった.

《例 1》 G がもともと可換群なら，可換化 $G/[G,G]$ は G と変わらない.（任意の交換子は $[a,b]=e$ であり，交換子群 $[G,G]$ は自明群 $\{e\}$ である.）

《例 2》 3次対称群の可換化. $S_3/[S_3,S_3]\cong \boldsymbol{Z}_2$.

§7.2 の例 10 で得られた S_3 の表示 $\langle a,b\mid a^2=b^2=(ab)^3=e\rangle$ に $aba^{-1}b^{-1}=e$ という関係子（すなわち $ab=ba$ という関係）を加えてみればよい. すると $(ab)^3=ababab=a^3b^3=e$. これと $a^2=e$, $b^2=e$ から $ab=e$. よって $b=a^{-1}=a$. したがって $S_3/[S_3,S_3]=\langle a\mid a^2=e\rangle\cong\boldsymbol{Z}_2$.

以後，可換群（アーベル群）をしばしば“加法群”として表わすことにする. つまり積 $a\circ b$ を‘和’の記号 $a+b$ で書くのである. べき $a^m=a\circ a\circ\cdots\circ a$（$m$ 個）は $a+a+\cdots+a=ma$ というように m 倍の記号で表わされることになる. 逆元 a^{-1} は $-a$ である. 単位元 e は 0 で表わされる.

閉曲面の基本群の可換化を考える前に，アーベル群の直和について説明しよう.

アーベル群 G,H の**直和**とは自由積 $G*H$ の可換化である．自由積（cf. §8.3）の要素は G と H の要素を任意の順序で有限個並べたものだった．たとえば $g_1g_2h_1g_3$ など．直和は，これを可換化したものだから，g_i, h_j は可換としてよく，必要なら g_i, h_j を入れかえて G の要素をすべて前へ出すことができる．例．$g_1g_2h_1g_3 = g_1g_2g_3h_1$．よって，直和の要素はすべて gh（$g \in G, h \in H$）という形としてよい．$gh = g'h'$ のための必要十分条件は $g = g'$，$h = h'$ であり，また積 $(gh)(g'h')$ は $(g \circ g')(h \circ h')$ に等しい．G の要素 g を ge（$g \in G, e \in H$）と同一視すれば G は直和の部分群と考えられる．同様に H も直和の部分群になる．

G と H の直和を $G \oplus H$ という記号で表わす．

上のことを，'積' の記号として $+$ を使って，加法群の言葉で言いかえれば次のようになる．

アーベル群 G,H の直和 $G \oplus H$ は，集合としては，形式的和 $g + h$（$g \in G, h \in H$）の全体である．ただし $g + h = g' + h'$ のための必要十分条件は $g = g'$，$h = h'$ であるとする．また $g + h$ と $g' + h'$ の和は $(g+h) + (g'+h') = (g+g') + (h+h')$ で与えられる．$0+0$（これを再び 0 と書く）が $G \oplus H$ の単位元である．$G \oplus H \cong H \oplus G$ が成り立つ．

同様に任意（有限）個数のアーベル群 $G, H, \cdots, L$ の直和 $G \oplus H \oplus \cdots \oplus L$ も定義できる．

《例 3》 $\pi_1(T^2, x_0) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$

前の § で見たように $\pi_1(T^2, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = e \rangle$ は自由群 $F(\alpha, \beta)$ の可換化である．$F(\alpha, \beta) = F(\alpha) * F(\beta)$ であり，$F(\alpha)$，$F(\beta)$ は加法群 $\boldsymbol{Z}$ に同型であるから，この自由積の可換化は $\boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$ である．α, β はそれぞれ第 1，第 2 の $\boldsymbol{Z}$ の生成元であって，$\pi_1(T^2, x_0)$ の任意の要素は $m\alpha + n\beta$ と一意的に書ける．

定理 8.3 で与えた閉曲面の基本群を可換化してみよう．

$\boldsymbol{\pi_1(X(0, q), x_0)}$ の可換化

定理 8.3 によれば $\pi_1(X(0,q), x_0) \cong \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_q, \beta_q \mid [\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] \cdots [\alpha_q, \beta_q] = e \rangle$ である（交換子の記号を使った）．これを可換化するには $[\alpha_i, \beta_j] = e$，$[\alpha_i, \alpha_j] = e$，$[\beta_i, \beta_j] = e$（$i, j = 1, 2, \cdots, q$）という新たな関係を入れればよい．もともとの関係 $[\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] \cdots [\alpha_q, \beta_q] = e$ は，上のような新たな関係を入れた後ではアタリマエになってしまって不必要になる．結局，$\pi_1(X(0,q), x_0)$ の可換化は，自由群 $F(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_q, \beta_q)$ の可換化と同じである．$F(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_q, \beta_q) = F(\alpha_1) * F(\beta_1) * \cdots * F(\alpha_q) * F(\beta_q)$ であるから

$$\pi_1(X(0, q), x_0) \text{ の可換化} \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} \quad (2q \text{ 個の } \boldsymbol{Z} \text{ の直和})$$

となる．これらの $\boldsymbol{Z}$ の生成元は左から $\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_q, \beta_q$ である．$\pi_1(X(0,q), x_0)$ の可換化の任意の要素は $m_1\alpha_1 + n_1\beta_1 + \cdots + m_q\alpha_q + n_q\beta_q$ の形に一意的に表わされる（$m_i, n_j \in \boldsymbol{Z}$）．

$\boldsymbol{\pi_1(X(p, 0), x_0)}$ の可換化

$\pi_1(X(p, 0), x_0) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \mid \alpha_1{}^2\alpha_2{}^2 \cdots \alpha_p{}^2 = e \rangle$ を可換化するには，まず自由群 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \rangle$ を可換化しておき，その後，$\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2 \cdots \alpha_p{}^2 = e$ を加法群の記号で書きなおした関係

$2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_p=0$ をつけ加えればよい.

$\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\rangle$ の可換化は $\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}$ であって任意の要素は $m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\cdots+m_p\alpha_p$ $(m_i\in\boldsymbol{Z})$ と一意的に書ける. これは $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\cdots+n_{p-1}\alpha_{p-1}+n_p(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p)$ と書けることにも注意しよう（ここに, $n_1=m_1-m_p,\cdots,n_{p-1}=m_{p-1}-m_p,\ n_p=m_p$ である). このような要素 $m_1\alpha_1+\cdots+m_p\alpha_p$ が $2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_p=0$ という関係をつけ加えた後で0に同一視されるとすれば, $m_1=m_2=\cdots=m_p=2k$（偶数）でなければならない. 逆に $m_1=m_2=\cdots=m_p=2k$ なら明らかに0に同一視される. $n_i=m_i-m_p$ $(1\leqq i\leqq p-1)$, $n_p=m_p$ であるから, n_i の方の言葉でいえば, $n_1=n_2=\cdots=n_{p-1}=0$, $n_p=2k$ となる. これがその要素が0に同一視されることの必要十分条件である. 結局 $\pi_1(X(p,0),x_0)$ の可換化は次のようになった.

$$\pi_1(X(p,0),x_0) \text{ の可換化} \cong \boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}_2 \quad (p-1 \text{ 個の } \boldsymbol{Z} \text{ と } \boldsymbol{Z}_2 \text{ の直和})$$

$\boldsymbol{Z}$ の生成元は左から $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p-1}$, また $\boldsymbol{Z}_2$ の生成元は $(\alpha_1+\cdots+\alpha_{p-1}+\alpha_p)$ である.

以上まとめて次の定理を得る.

【定理 8.4】

$$\pi_1(X(0,q),x_0) \text{ の可換化} \cong \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z} \quad (2q \text{ 個の } \boldsymbol{Z} \text{ の直和})$$

$$\pi_1(X(p,0),x_0) \text{ の可換化} \cong \boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}_2 \quad (p-1 \text{ 個の } \boldsymbol{Z} \text{ と1個の } \boldsymbol{Z}_2 \text{ の直和})$$

閉曲面の基本群を可換化した目的は, それらが互いに同型でないことを証明することだった. 可換化した群が同型でないことを示して, もとの群が同型でないことをいおうというのである. それには, 2つのアーベル群が同型か否かを判定する手段がなければならない. 次の代数の基礎的知識が役に立つ.（この証明については, たとえば田村 [8] §11 を見よ.）

【定理】（i） 任意の有限生成アーベル群 G は $\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\oplus T$ という直和に同型である: $G\cong\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\oplus T$（$T$ は有限アーベル群, すなわち有限群であるようなアーベル群).

（ii） このような直和への分解は一意的である. すなわち, $\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\oplus T\cong\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\oplus T'$（$T, T'$ は有限アーベル群）なら, $\boldsymbol{Z}$ の個数は等しく, かつ $T\cong T'$ である.

$G\cong\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\oplus T$ に現われる $\boldsymbol{Z}$ の個数を G の**階数**（rank）という. 上の定理から, 有限生成アーベル群 G と H が同型ならばそれらの階数は等しい.

$\boldsymbol{Z}$ の n 個の直和 $\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}$ を**階数 n の自由アーベル群**とよぶ.

定理 8.4 により, $\pi_1(X(0,q),x_0)$ の可換化は階数 $2q$ の自由アーベル群になる. よって q の値が違えばそれらは互いに同型でない. また $\pi_1(X(p,0),x_0)$ の可換化は, 階数 $p-1$ の自由アーベル群と $\boldsymbol{Z}_2$ の直和であるから, p の値が違えば互いに同型でない. また有限アーベル群 $\boldsymbol{Z}_2$ を含むか含まないかが違うので $\pi_1(X(0,q),x_0)$ の可換化と $\pi_1(X(p,0),x_0)$ の可換化が同型になることもない. これで次の定理が証明できた.

【定理 8.5】 Σ^2, $X(0,q)$ $(q\geqq 1)$, $X(p,0)$ $(p\geqq 1)$ の基本群はどれも互いに同型でない.

基本群の位相不変性（§8.2）から直ちに次の系が得られる.

【系 1】 Σ^2, $X(0,q)$ $(q\geqq 1)$, $X(p,0)$ $(p\geqq 1)$ は互いに位相同形にならない.

§6.4 の定理 6.7 で示したように，任意の連結な閉曲面は，標準的な閉曲面 $X(0,q)$ $(q\geqq 0)$ または $X(p,0)$ $(p\geqq 1)$ のどれかに PL 同形であった．上の系1からわかることは，2つの連結な閉曲面 X, Y が位相同形なら，それらの標準形は同じものでなければならないということである．したがって次の系を得る．これは**閉曲面に関する基本予想**の肯定的証明にほかならない．

【系 2】 閉曲面 X, Y が位相同形なら，それらは PL 同形である．

系2のさらに系として（オイラー標数の PL 不変性を使って），

【系 3】(cf. §5.6) 閉曲面 X, Y が位相同形なら，オイラー標数は等しい：$\chi(X)=\chi(Y)$.

基本群は位相不変性よりさらに強いホモトピー不変性をもっていたから (cf. §8.2)，系1，系2よりさらに強い主張が言える．

【系 4】 Σ^2, $X(0,q)$ $(q\geqq 1)$, $X(p,0)$ $(p\geqq 1)$ は互いにホモトピー同値ではない．また2つの閉曲面 X, Y がホモトピー同値なら，それらは同じ標準形をもち，したがって互いに PL 同形である．オイラー標数も等しい．

第6章で残されたこと，すなわち‘T^2 にメビウスの帯が含まれるかどうか’は今や難なく解決される．もし T^2 がメビウスの帯 M を含めば $(M=P^2-\mathrm{Int}\,\Delta^2$ と考えられるから) $T^2=P^2\#F^2$ (F^2 はある閉曲面) でなければならないが，系1からこれは不可能である．同様にして $X(0,q)=T^2\#\cdots\#T^2$ は確かに向きづけ可能であることがわかる．

§8.5 ホモロジー群

前の約束に従って，多面体については，弧状連結のことを単に連結ということにする (cf. §6.4 ステップ1の前)．X を連結な多面体，x_0 を任意の基点とする．前の § で，基本群 $\pi_1(X,x_0)$ の可換化 $\pi_1(X,x_0)/[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]$ を考えた．この可換化のことを，多面体 X の**1次元ホモロジー群**とよび，$H_1(X)$ と書く．後で述べるように，実は本来の1次元ホモロジー群の定義は別にあるのだが，連結な多面体については‘基本群の可換化’と1次元ホモロジー群とは一致してしまうのである．

さて，いくつかの多面体については，1次元ホモロジー群を既に知っている．

たとえば，円周の基本群は $\pi_1(\Sigma^1,x_0)\cong \boldsymbol{Z}$ であったから1次元ホモロジー群も $H_1(\Sigma^1)\cong \boldsymbol{Z}$ である．また定理 8.4 は，閉曲面の H_1 を計算したことに相当している．

$H_1(\Sigma^2)\cong\{0\}$ （自明群）

$H_1(X(0,q))\cong \boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}$ （階数 $2q$ の自由アーベル群）

$H_1(X(p,0))\cong \boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}_2$ （階数 $p-1$ の自由アーベル群と $\boldsymbol{Z}_2$ の直和）

$f:X\longrightarrow Y$ を連結な多面体 X と Y の間の連続写像とする．

【補助定理】 f は $f_*:H_1(X)\longrightarrow H_1(Y)$ という準同型写像を引き起こす．$f\simeq g$ なら $f_*=g_*$ である．

この補助定理は基本群についての対応する結果 (§8.2) から可換化に移ることによって証

明される．基本群のときと同じ議論で，この補助定理から1次元ホモロジー群の位相不変性やホモトピー不変性が導かれる．

さて，$H_1(X)$ の‘本来の定義’を与えよう．基本群の定義ほど直観的でないので，慣れるまで形式的なものに感じられるかも知れない．

まず，1単体の**向き**というものを定義する．いままで1単体 $|p_0p_1|$ という場合，頂点 p_0, p_1 の順序は問題にしないで，$|p_0p_1|$ も $|p_1p_0|$ も同じ1単体であると考えてきた．1単体の向きとは，この2つを区別したものである．向きの指定された1単体を**向きづけられた1単体**という．記号で $\langle p_0p_1\rangle, \langle p_1p_0\rangle$ と書く．$\langle p_0p_1\rangle$ は p_0p_1 という順序が，また $\langle p_1p_0\rangle$ は p_1p_0 という順序がそれぞれ指定された1単体である．直観的には，1単体の向きとは，その上に描かれた矢印と思えばよい．$\langle p_0p_1\rangle$ であれば，p_0 から p_1 に向う矢印が描かれていると思うのである（図 8.18）．

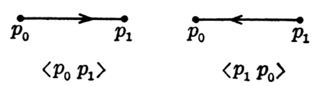
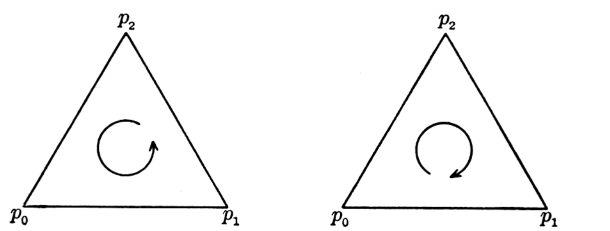


図 8.18　向きづけられた1単体

$H_1(X)$ を定義するにはさらに**2単体の向き**というものも考える必要がある．やはり頂点の並べ方を問題にするのであるが，2単体 $|p_0p_1p_2|$ の頂点 p_0, p_1, p_2 の並べ方（全部で6通り）を2つに分け，$p_0p_1p_2$, $p_1p_2p_0$, $p_2p_0p_1$ という3つの並べ方はみな同じ向きを表わすとし，また $p_1p_0p_2$, $p_0p_2p_1$, $p_2p_1p_0$ の3つも同じ向きを表わすとする．そして，この2つのグループは互いに‘逆の’向きを表わすと約束する．このことの直観的意味は図 8.19 に示されている．同じグループに属する並べ方は同じ向きの‘ぐるっとまわる矢印’を表わしている．2単体の向きとは，その上に描かれた‘ぐるっとまわる矢印’の絵のことだと思えばよい．ひとつの向きの指定された2単体を**向きづけられた2単体**という．記号で $\langle p_0p_1p_2\rangle$, $\langle p_0p_2p_1\rangle$, etc. と書く．2単体の向きの約束から $\langle p_0p_1p_2\rangle = \langle p_1p_2p_0\rangle = \langle p_2p_0p_1\rangle$ また $\langle p_1p_0p_2\rangle = \langle p_0p_2p_1\rangle = \langle p_2p_1p_0\rangle$ である．



$\langle p_0\,p_1\,p_2\rangle = \langle p_1\,p_2\,p_0\rangle = \langle p_2\,p_0\,p_1\rangle$, $\langle p_1\,p_0\,p_2\rangle = \langle p_0\,p_2\,p_1\rangle = \langle p_2\,p_1\,p_0\rangle$

図 8.19　向きづけられた2単体

さて，K という複体が与えられたとしよう．K の有限個の1単体に勝手な向きを与え，それに整数係数をつけて形式的に加えたものを K の**1次元鎖**（1-chain）という．たとえば，K を図 8.20 のような複体とすると，

$$5\langle ab\rangle - 6\langle bg\rangle, \quad \langle ab\rangle + \langle bg\rangle + \langle ga\rangle,$$

$$3\langle ba\rangle + 7\langle bg\rangle - 9\langle fe\rangle$$

などは1次元鎖である．

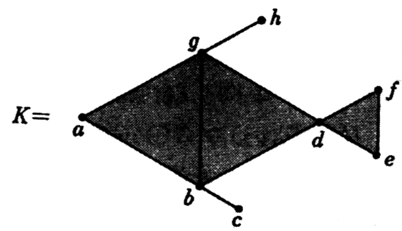


図 8.20

1次元鎖の間に足し算ができる．同じ1単体の係数同士を加えればよい．たとえば

$$(5\langle ab\rangle - 6\langle bg\rangle) + (\langle ab\rangle + \langle bg\rangle + \langle ga\rangle) = 6\langle ab\rangle - 5\langle bg\rangle + \langle ga\rangle$$

である.

ここで，次のような**規約**を設ける："向きづけられた1単体 $\langle p_0p_1\rangle$ と，逆の向きのついた1単体 $\langle p_1p_0\rangle$ とを加えれば0になる"．言いかえれば $\langle p_0p_1\rangle = -\langle p_1p_0\rangle$ とする.

例：$(5\langle ab\rangle - 6\langle bg\rangle) + (3\langle ba\rangle + 7\langle bg\rangle - 9\langle fe\rangle) = 2\langle ab\rangle + \langle bg\rangle - 9\langle fe\rangle$

K の1次元鎖の全体はこの足し算に関して加法群になる．これを K の**1次元鎖群**とよび $C_1(K)$ と書き表わす.

同様に K の**2次元鎖群** $C_2(K)$ が定義できる．向きづけられた2単体に整数係数をつけて形式的に加えたものを**2次元鎖**とし，それらの間の足し算を上と同様に定義したものである．ただし，逆の向きのついた2単体，たとえば $\langle p_0p_1p_2\rangle$, $\langle p_1p_0p_2\rangle$ は $C_2(K)$ の中で互いにマイナスであるとする．$\langle p_0p_1p_2\rangle = -\langle p_1p_0p_2\rangle$.

0次元鎖というものも定義しておこう．ひとつの頂点には'向き'のつけようはないが，単に上の記号と合わせる意味で，頂点 $|p_0|, |p_1|, \cdots$ のことを $\langle p_0\rangle, \langle p_1\rangle, \cdots$ と書く．0次元鎖とは形式的な和 $m_0\langle p_0\rangle + m_1\langle p_1\rangle + \cdots + m_r\langle p_r\rangle$ $(m_i \in \boldsymbol{Z})$ のことである．たとえば K を図 8.20 の複体として，$5\langle a\rangle + 6\langle b\rangle - 7\langle b\rangle$ は K のひとつの0次元鎖である．K の0次元鎖の全体 $C_0(K)$ も足し算に関して加法群になる.

境界準同型

境界準同型とよばれる準同型写像 $\partial_1 : C_1(K) \longrightarrow C_0(K)$，$\partial_2 : C_2(K) \longrightarrow C_1(K)$ を次のように定義する.

まず $\partial_1 : C_1(K) \longrightarrow C_0(K)$ の定義から.

$\langle p_0p_1\rangle$ が向きづけられた1単体のとき，$\partial_1(\langle p_0p_1\rangle) = \langle p_1\rangle - \langle p_0\rangle$ と定める．1単体に描かれた矢印の'先っぽ'の方から'根もと'の方の頂点を引くのである．$C_1(K)$ の要素（1次元鎖）は向きづけられた1単体の形式和だから，各1単体についてこのように定義しておけば，1次元鎖についても ∂_1 の定義が拡張できる．こうして $\partial_1 : C_1(K) \longrightarrow C_0(K)$ が定義できた.

たとえば，図 8.20 の複体 K において，

$$\begin{aligned}\partial_1(5\langle ab\rangle - 6\langle bg\rangle) &= 5\partial_1(\langle ab\rangle) - 6\partial_1(\langle bg\rangle)\\ &= 5(\langle b\rangle - \langle a\rangle) - 6(\langle g\rangle - \langle b\rangle)\\ &= 5\langle b\rangle - 5\langle a\rangle - 6\langle g\rangle + 6\langle b\rangle\\ &= -5\langle a\rangle + 11\langle b\rangle - 6\langle g\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_1(\langle ab\rangle + \langle bg\rangle + \langle ga\rangle) &= (\langle b\rangle - \langle a\rangle) + (\langle g\rangle - \langle b\rangle) + (\langle a\rangle - \langle g\rangle)\\ &= \langle a\rangle - \langle a\rangle + \langle b\rangle - \langle b\rangle + \langle g\rangle - \langle g\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

この2番目の例の1次元鎖 $\langle ab\rangle + \langle bg\rangle + \langle ga\rangle$ のように，∂_1 という準同型によって $0(\in C_0(K))$ に写る1次元鎖を，**1次元サイクル**とよぶ．図 8.20 の上で，矢印 $\langle ab\rangle, \langle bg\rangle, \langle ga\rangle$ をこの順にたどると，この場合には確かに閉じた折れ線 (cycle) になっている．ほかに $5\langle ab\rangle$

$+5\langle bg\rangle+5\langle ga\rangle$ や $-\langle ab\rangle-\langle bd\rangle-\langle dg\rangle-\langle ga\rangle$ あるいは，この2つを加えた $4\langle ab\rangle+5\langle bg\rangle+4\langle ga\rangle-\langle bd\rangle-\langle dg\rangle$ なども1次元サイクルの例である．

次に $\partial_2 : C_2(K) \longrightarrow C_1(K)$ を定義しよう．

この場合も，ひとつひとつの向きづけられた2単体について ∂_2 を定めておけばよい．$\partial_2(\langle p_0p_1p_2\rangle)$ の決め方は図 8.21 で象徴的に示されている．つまり，$\langle p_0p_1p_2\rangle$ の上の‘ぐるっとまわる矢印’に沿って，3角形の周をぐるっとまわる1次元鎖を $\partial_2(\langle p_0p_1p_2\rangle)$ とするのである．式で書けば

$$\partial_2(\langle p_0p_1p_2\rangle)=\langle p_0p_1\rangle+\langle p_1p_2\rangle+\langle p_2p_0\rangle.$$

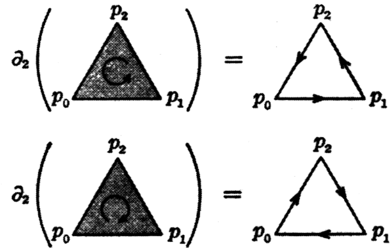


図 8.21

あるいは，同じことだが，最後の項 $\langle p_2p_0\rangle$ を規約に従って $-\langle p_0p_2\rangle$ と考えれば

$$\partial_2(\langle p_0p_1p_2\rangle)=\langle p_0p_1\rangle+\langle p_1p_2\rangle-\langle p_0p_2\rangle=\langle p_1p_2\rangle-\langle p_0p_2\rangle+\langle p_0p_1\rangle$$

となる．（最後の書き方は，$\langle p_0p_1p_2\rangle$ から次々と p_0, p_1, p_2 を抜いた順に並べてある．）

向きづけられた2単体上での ∂_2 の定義を，∂_1 のときと同様に形式的に2次元鎖に拡張して，$\partial_2 : C_2(K) \longrightarrow C_1(K)$ を得る．

こうして，次の系列ができた．

$$C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K)$$

【補助定理】 合成 $\partial_1\circ\partial_2=0$ である．

証明は，各2単体 $\langle p_0p_1p_2\rangle$ について確かめればよい．実際，

$$\begin{aligned}\partial_1\circ\partial_2(\langle p_0p_1p_2\rangle)&=\partial_1(\langle p_0p_1\rangle+\langle p_1p_2\rangle+\langle p_2p_0\rangle)\\&=(\langle p_1\rangle-\langle p_0\rangle)+(\langle p_2\rangle-\langle p_1\rangle)+(\langle p_0\rangle-\langle p_2\rangle)\\&=0.\end{aligned}$$

この補助定理から，勝手な2次元鎖 c についてその‘境界’ $\partial_2(c)$ は1次元サイクルであることがわかる：$\partial_1(\partial_2(c))=0$．このような $\partial_2(c)$ という形の1次元サイクルを**1次元境界サイクル**とよぶ．1次元境界サイクル全体を $B_1(K)$ と書けば，$B_1(K)$ は加法群になる．定義から $B_1(K)=\mathrm{Im}(\partial_2)$ である．

また1次元サイクル全体の集合を $Z_1(K)$ と書けば，$Z_1(K)$ も加法群になる．1次元サイクルというのは ∂_1 によって0に写る1次元鎖のことだったから，$Z_1(K)=\mathrm{Ker}(\partial_1)$ である．補助定理から $B_1(K)\subset Z_1(K)$ がわかる．

【定義】 剰余群 $Z_1(K)/B_1(K)$ を K の**1次元ホモロジー群**とよび，$H_1(K)$ と表わす．

$B_1(K)$ による $Z_1(K)$ の剰余類のひとつひとつを**ホモロジー類**とよぶ．2つの1次元サイクル z, z' が同じホモロジー類に属するためには，z が $B_1(K)$ によって z' に移ること（cf. §7.1）すなわち $z'=z+a$ $(a\in B_1(K))$ と書けること，言いかえれば $z'-z\in B_1(K)$ であることが必要十分である．$z'-z=\partial_2(c)$ となる2次元鎖 c が存在するといっても同じである．このとき，z' と z は互いに**ホモローグ**であるといい，$z'\backsim z$ という記号で表わす．

この関係は1次元サイクルの間の同値関係になる．1次元サイクル全体を，ホモローグという同値関係で類別した同値類がホモロジーにほかならない．$H_1(K)$ はこのようなホモロジー類の集まりである．

1次元サイクル z の属するホモロジー類を $[z]$ と書く．$[z]=0$ ($\in H_1(K)$) となるための必要十分条件は $z \backsim 0$，すなわち $z=\partial_2(c)$ となる2次元鎖 c があることである．

《例》 $K=K(\sigma^2)$ として $H_1(K)$ を求めてみる（図8.22）．

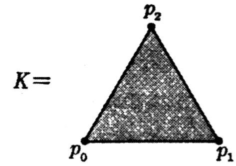


図 8.22

1次元鎖は，l, m, n を整数として $l\langle p_0p_1\rangle+m\langle p_1p_2\rangle+n\langle p_2p_0\rangle$ という形をしている．

$$\begin{aligned}\partial_1(l\langle p_0p_1\rangle+m\langle p_1p_2\rangle+n\langle p_2p_0\rangle) &= l(\langle p_1\rangle-\langle p_0\rangle)+m(\langle p_2\rangle-\langle p_1\rangle)+n(\langle p_0\rangle-\langle p_2\rangle)\\ &= (n-l)\langle p_0\rangle+(l-m)\langle p_1\rangle+(m-n)\langle p_2\rangle\end{aligned}$$

であるから $l\langle p_0p_1\rangle+m\langle p_1p_2\rangle+n\langle p_2p_0\rangle$ が1次元サイクルであるための必要十分条件は $(n-l)=(l-m)=(m-n)=0$，すなわち $l=m=n$ である．

ところが，$l\langle p_0p_1\rangle+l\langle p_1p_2\rangle+l\langle p_2p_0\rangle=\partial_2(l\langle p_0p_1p_2\rangle)$ であるから，すべての1次元サイクルは境界サイクルになってしまう．よって $H_1(K)=\{0\}$．（これは3角形の基本群は自明群であるという事実に対応している．）

K から2単体 $|p_0p_1p_2|$ を取り除いた複体を L とする．$|L|\cong\Sigma^1$ である．この場合も1次元サイクルは $\langle p_0p_1\rangle+\langle p_1p_2\rangle+\langle p_2p_0\rangle$ の整数倍であるが，今度は2単体がないので，境界サイクルは0しかない．よって $H_1(L)\cong Z_1(L)\cong \boldsymbol{Z}$．これは $\pi_1(\Sigma^1, x_0)\cong\boldsymbol{Z}$ という事実に対応している．

多面体 X が与えられたとき，X の単体分割 K をどのようにとっても，その1次元ホモロジー群 $H_1(K)$ は自然な仕方で同型になる．この事実はホモロジー論の基本的定理であるが，この本ではそれを認めることにしよう．

このことから，多面体 X について，$H_1(X)$ が意味をもつ．X の任意の単体分割 K をとって $H_1(X)=H_1(K)$ とおけばよい．

多面体 X が連結であるとし，適当な点 x_0 を基点とするループ φ を考える．X を適当に単体分割すると，φ は K の1単体を次々につないだ折れ線にホモトープになる（図8.23）．

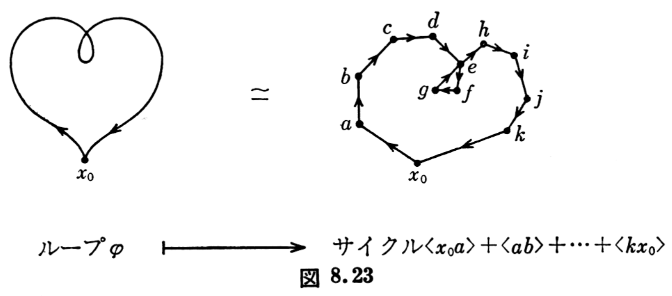


図 8.23

このような閉じた折れ線は1次元サイクルであるから，それの属するホモロジー類が $H_1(K)$ $(=H_1(X))$ の中に定まる．2つのループ φ, ψ が $\varphi\simeq\psi$ であれば，それぞれを‘折れ線近似’したサイクルは互いにホモローグになることが証明できる．こうして，$h:\pi_1(X, x_0)\longrightarrow H_1(X)$ という写像が決まり，h は準同型写像になる．$H_1(X)$ は加法

群であるから，可換であり，したがって，$\pi_1(X,x_0)$ の任意の交換子 $[a,b]$ は $H_1(X)$ の単位元0に写る．よって h は

$$h_*:\pi_1(X,x_0)/[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]\longrightarrow H_1(X)$$

という準同型写像を引き起こす（cf. §7.2 準同型定理の証明）．この h_* が，実は，同型になり，この§の始めに述べた事実‘連結な多面体について，$H_1(X)$ は $\pi_1(X,x_0)$ の可換化に一致する’が示されるのである．細かい議論はやや技術的になるので省略する（cf. 田村［8］§35）.

さて，4次元のトポロジーで中心的な役割を果たすのは，次の $H_2(X)$ である．

2次元ホモロジー群 $H_2(X)$

$H_1(X)$ を定義するのに，向きづけられた2単体までの概念が必要だったように，$H_2(X)$ を定義するには，さらに‘3単体の向き’の概念がいる．

3単体についても‘向き’は頂点の並べ方で定められる．3単体 $|p_0p_1p_2p_3|$ の頂点の並べ方には4の階乗 $4!=24$ 通りの方法がある．それらを12ずつ2つのグループに分け，同一グループ内の並べ方は同じ‘向き’を定め，異なるグループに属する並べ方は互いに‘逆向き’を定めるものとする．‘グループ分け’の原理は次の通りである．ひとつの並べ方が与えられたとし，そのどれか2つの頂点を入れかえる操作を**互換**という．たとえば $p_0p_1p_2p_3$ という並べ方の，p_1 と p_3 を入れかえて $p_0p_3p_2p_1$ にする操作は，ひとつの互換である．$p_0p_1p_2p_3$ という並べ方から出発し，偶数回の互換の操作をほどこして得られる並べ方をすべてひとつのグループとし，奇数回の互換の操作をほどこして得られる並べ方をすべて集めて，もうひとグループにする．

一般に n 個の文字 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ の‘並べ換え’の操作（これを**置換**という）全体は群になる．この群は §7.1 に出てきた<u>n 次対称群</u>にほかならない．$\{1,2,3,\cdots,n\}$ のうち特定の2文字，たとえば i と j $(i\neq j)$ を入れ換える操作が<u>互換</u>である．記号で (i,j) と書き表わす．任意の置換はいくつかの互換の合成（群 S_n の中での‘積’）として表わせることが知られている．偶数個の互換の積になる置換を**偶置換**，奇数個の互換の積になる置換を**奇置換**という．ある置換が偶置換か奇置換かは，はっきり決まっている．（実際，積 $\prod_{i<j}(x_i-x_j)=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)$ の変数に偶置換をほどこせばそのまま不変だし奇置換をほどこせば積全体の符号が変わる．）また偶置換と奇置換はちょうど同数（$n!/2$ 個）ある．偶置換全体は S_n の正規部分群をなすことが知られている．これを A_n と書いて **n 次交代群**とよぶ．

結局，$p_0p_1p_2p_3$ に偶置換（A_4 の要素！）をほどこしたものをひとグループにし，奇置換をほどこしたものを他のひとグループにするのである．同一グループ内の2つの並べ方は互いに偶置換で移りあえる．

向き（頂点の並べ方）の与えられた3単体を前のように $\langle p_0p_1p_2p_3\rangle$, etc で表わす．向きについての上の規約から

$$\text{ひとつの向き}:\langle p_0p_1p_2p_3\rangle=\langle p_1p_0p_3p_2\rangle=\langle p_2p_3p_0p_1\rangle=\langle p_3p_2p_1p_0\rangle=\cdots$$

もうひとつの向き：$\langle p_1p_0p_2p_3\rangle=\langle p_0p_1p_3p_2\rangle=\langle p_2p_3p_1p_0\rangle=\langle p_3p_2p_0p_1\rangle=\cdots.$

K を複体とする．$C_1(K), C_2(K)$ の構成と全く同様に，向きを与えた K の 3 単体に整係数をつけて，その有限個を形式的に加えたものを K の **3 次元鎖**という．3 次元鎖の全体は足し算に関して加法群になる．この加法群を記号で $C_3(K)$ と書く．

境界準同型 $\partial_3 : C_3(K) \longrightarrow C_2(K)$ の定義

この場合もひとつひとつの向きづけられた 3 単体について ∂_3 を定めればよい．前の ∂_2 の公式を思い出してみると $\partial_2(\langle p_0p_1p_2\rangle)=\langle p_1p_2\rangle-\langle p_0p_2\rangle+\langle p_0p_1\rangle$ であった．この右辺は，$\langle p_0p_1p_2\rangle$ から頂点を順々に左から取り除いて得られる 1 単体をこの順に並べたものになっている．そして符号はプラス・マイナスを交互につけている．3 単体についても，$\langle p_0p_1p_2p_3\rangle$ から頂点を左から順々に取り除いて得られる 2 単体をこの順に並べ，プラス・マイナスを交互につけたものとして $\partial_3(\langle p_0p_1p_2p_3\rangle)$ を定義しよう．つまり，

$$\partial_3(\langle p_0p_1p_2p_3\rangle)=\langle p_1p_2p_3\rangle-\langle p_0p_2p_3\rangle+\langle p_0p_1p_3\rangle-\langle p_0p_1p_2\rangle$$

とおくのである．3 次元鎖について ∂_3 の定義が拡張できるのは前と同じである．こうして $\partial_3 : C_3(K) \longrightarrow C_2(K)$ が定義でき，次の系列が得られた．

$$C_3(K) \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K)$$

【補助定理】 ∂_3 と ∂_2 の合成 $\partial_2\circ\partial_3=0$ である．

K のひとつひとつの 3 単体 $\langle p_0p_1p_2p_3\rangle$ について示せばよい．実際計算してみると

$$\begin{aligned}\partial_2\circ\partial_3(\langle p_0p_1p_2p_3\rangle) &= \partial_2(\langle p_1p_2p_3\rangle-\langle p_0p_2p_3\rangle+\langle p_0p_1p_3\rangle-\langle p_0p_1p_2\rangle)\\ &= (\langle p_2p_3\rangle-\langle p_1p_3\rangle+\langle p_1p_2\rangle)-(\langle p_2p_3\rangle-\langle p_0p_3\rangle+\langle p_0p_2\rangle)\\ &\quad +(\langle p_1p_3\rangle-\langle p_0p_3\rangle+\langle p_0p_1\rangle)-(\langle p_1p_2\rangle-\langle p_0p_2\rangle+\langle p_0p_1\rangle)\\ &= 0.\end{aligned}$$

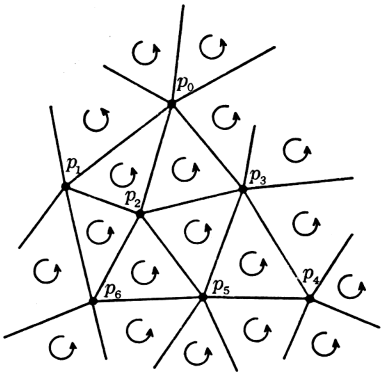
2 次元鎖 c で $\partial_2(c)=0$ となるものを **2 次元サイクル**という．上の補助定理は，任意の 3 次元鎖 c の境界 $\partial_3(c)$ は 2 次元サイクルになることを示している．このような $\partial_3(c)$ $(c \in C_3(K))$ という形の 2 次元サイクルを **2 次元境界サイクル**という．2 次元サイクルの全体を $Z_2(K)$，2 次元境界サイクルの全体を $B_2(K)$ とすると，$Z_2(K)=\mathrm{Ker}(\partial_2)$, $B_2(K)=\mathrm{Im}(\partial_3)$ である．補助定理より $B_2(K)\subset Z_2(K)$．剰余群 $Z_2(K)/B_2(K)$ のことを **2 次元ホモロジー群**とよぶのである．記号 $H_2(K)$.

2 つの 2 次元サイクル z, z' について $z-z' \in B_2(K)$ となるとき，すなわち，$z-z'=\partial_3(c)$ という $c \in C_3(K)$ があるとき，z と z' は<u>ホモローグ</u>であるといい，$z \backsim z'$ と書く．これは同値関係になる．$Z_2(K)$ をこの同値関係で類別した同値類を<u>ホモロジー類</u>とよぶ．前と同様に，z の属するホモロジー類を $[z]$ と書く．ホモロジー類の全体が $H_2(K)$ にほかならない．

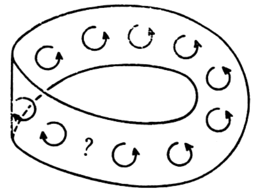
前に，閉じた折れ線は 1 次元サイクルを表わすことを観察した．同じように，“向きづけ可能な閉曲面は 2 次元サイクルを表わす” ことがわかる．このことを見るため，ひとつの閉曲面 F を有限個の 3 角形に分割してみよう．図 8.24 (a) はその一部を描いたものである．

もとの閉曲面 F が向きづけ可能なら，分割によって得られたすべての 3 角形にいっせいに

同じ‘向き’のぐるっとまわる矢印を描くことができる(図8.24(a)). F が向きづけ不可能なら，メビウスの帯を含むからこのようなことはできない(図8.24(b)). さて，向きづけ可能の場合，いっせいに与えた矢印によってひとつひとつの3角形に向きを定め，それらをすべて加えた2次元鎖 c_F を考える. たとえば図8.24(a)の場合なら



(a)



(b)

図 8.24

$$c_F = \langle p_0p_1p_2\rangle + \langle p_0p_2p_3\rangle + \langle p_1p_6p_2\rangle + \langle p_2p_6p_5\rangle + \langle p_2p_5p_3\rangle + \langle p_3p_5p_4\rangle + \cdots$$

である. c_F は2次元サイクルであることがわかる. それを示すためには，$\partial_2(c_F)=0$ を示せばよいが，たとえば $\partial_2(c_F)$ の中の $\langle p_0p_2\rangle$ の係数を見ると0である. なぜなら，図8.24(a)の矢印通りに，$\langle p_0p_1p_2\rangle$, $\langle p_0p_2p_3\rangle$ の ∂_2 を考えると，それぞれ $\langle p_2p_0\rangle$, $\langle p_0p_2\rangle$ が出てくるから，それらを加えて0になってしまう($\partial\langle p_0p_1p_2\rangle = \langle p_0p_1\rangle + \langle p_1p_2\rangle + \langle p_2p_0\rangle$, $\partial\langle p_0p_2p_3\rangle = \langle p_0p_2\rangle + \langle p_2p_3\rangle + \langle p_3p_0\rangle$). 同様に，すべての1単体について，その両側の3角形の ∂_2 から逆向きの1単体が出てきて，それらの和が0になってしまうのである. これで c_F が2次元サイクルになることがわかった. もしいっせいに矢印の向きを反対にすると，c_F のかわりに $-c_F$ が得られる. だから正確に言えば，単に‘向きづけ可能’というだけでなく，‘すでに向きづけられた(いっせいにぐるっとまわる矢印の与えられた)閉曲面が2次元サイクルを表わすのである. F が，多面体 $X=|K|$ の中の閉曲面(X に‘埋め込まれた’閉曲面)で，すでに向きづけられたものとする. F の表わす2次元サイクル c_F の属するホモロジー類 $[c_F]\in H_2(X)$ を簡単に $[F]$ と書く. ここに $H_2(X)$ と書いたが，$H_2(K)$ ($X=|K|$) のことである. この H_2 の場合も H_1 の場合と同じように，X をどんな複体 K によって分割しても，$H_2(K)$ はみな同型になる. よって $H_2(K)$ を $H_2(X)$ と書いてよい.

$H_2(X)$ もホモトピー不変性をもっている. 連続写像 $f:X\longrightarrow Y$ は，準同型写像 $f_*: H_2(X)\longrightarrow H_2(Y)$ を引き起こす. $f\simeq g$ なら $f_*=g_*$. これから $X\simeq Y$ なら $H_2(X)\cong H_2(Y)$ であることが示されるのである.

《例》 Σ^2 を2次元 PL 球面とすれば $H_2(\Sigma^2)\cong \boldsymbol{Z}$ である.

説明　Σ^2 は閉曲面であるから，‘向き’を決めておけば Σ^2 自身がひとつの2次元サイクルを表わす. Σ^2 は3単体を含まないので，このサイクルは境界サイクルになることはない. よって，このサイクルが $H_2(\Sigma^2)$ の生成元になり，$H_2(\Sigma)\cong \boldsymbol{Z}$ がわかるのである.

$H_1(X), H_2(X)$ と同様に，向きづけられた単体を使って，より高次のホモロジー群 $H_3(X)$, $H_4(X),\cdots$ が定義できる. これらもすべて加法群であり，ホモトピー不変性をもっている.

第9章

4次元多様体の符号数

§9.1　4次元における交叉(こうさ)の理論

3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の中に，2つの平面がある場合，その位置関係には3つの場合が区別される．① 平行な場合．このとき2つの平面は交わらない．② 一致してしまう場合．③ 2つの平面がひとつの直線に沿って交わる場合．この3つである．①② はやや特殊な位置関係であり，③ は‘一般的な’位置関係である．3次元の中で平面が一般的位置で交わるときには，共通部分が直線になるのである(図9.1)．

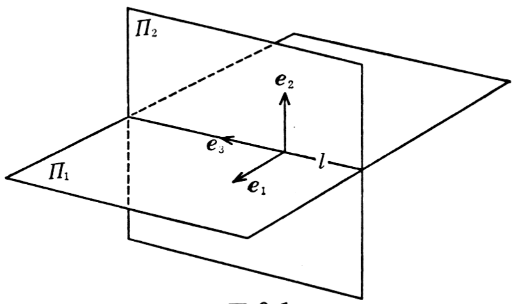


図 9.1

同じことを4次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ の中で考えてみると，2つの平面の位置関係には4つの場合が区別される．① 交わらないとき，② 一致する場合，③ 一直線に沿って交わる場合，④ 1点で交わる場合，の4つである．

3次元空間の中の我々の日常生活では，2平面がただ1点で交わる状況など経験できないから，④ の場合を理解するには幾何学的直観を多少飛躍させる必要がある．しかし ④ の場合が起き得ることを‘理論的に’示すことは何でもない．$\boldsymbol{R}^4$ の座標を (x_1, x_2, x_3, x_4) とし，第1の平面 Π_1 を $x_3 = x_4 = 0$ で定義される平面，第2の平面 Π_2 を $x_1 = x_2 = 0$ で定義される平面とすればよい．Π_1 の任意の点は $(x_1, x_2, 0, 0)$ という座標で決まり，Π_2 上の点は $(0, 0, x_3, x_4)$ という座標で決まる．Π_1 と Π_2 の共通部分は $x_3 = x_4 = 0$，$x_1 = x_2 = 0$ という2つの条件を同時に満たさねばならないから，$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$，すなわち原点 $(0, 0, 0, 0)$ しかないのである：$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$．

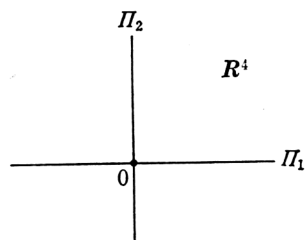


図 9.2

この様子は図 9.2 で（象徴的に）示されている．2つの直線はそれぞれ平面 Π_1, Π_2 を表わしている．それらの交わりは原点しかない．

上のようにして，2平面がただ1点で交わり得ることが示されたが，実は $\boldsymbol{R}^4$ ではそれが最も普通の位置関係である．4つの場合のうち ①②③ はやや特殊な場合であって，④ が最も一般的な位置関係なのである．たとえば ③ の場合，2平面が一直線に沿って交わる場合は，図 9.1 で示されている状況と全く同じになっている．そこで，図 9.1 のように $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ という3つの矢印（ベクトル）をとり，その方向に x_1, x_2, x_3 座標をとれば，この2平面は3次元空間 (x_1, x_2, x_3) に入ってしまう．いま $\boldsymbol{R}^4$ で考えているのだから，第4の方向 $\boldsymbol{e}_4$ が余っている．$\boldsymbol{e}_4$ 方向に x_4 座標をとる．そしてこの方向に一方の平面（たとえば Π_2）をほんの少し‘回転’させると，Π_1 との交わりが1点になってしまうことがわかる．② の，一致する場合も同様に，一方の平面をほんの少し‘回転’させると，2平面の交わりは1点になってしまう．要するに，$\boldsymbol{R}^4$ の中で2平面が交わるとき，どちらかの平面をほんの少しずらすことによって，2平面がただ1点で交わるようにすることができるのである．

さて，$\boldsymbol{R}^4$ の中で，2平面が1点で交わっている状況を考える．これらの2平面と $\boldsymbol{R}^4$ にそれぞれ‘向き’が与えられているとき，交わりの符号というものが定義できる．これについて説明しよう．

まず，もっと低い次元での簡単なモデルケースとして，‘向き’の指定された平面 $(\boldsymbol{R}^2)$ の上で2つの（向きづけられた）直線 l_1, l_2 が1点 p で交わっている場合を考えてみる(図9.3)．直線の‘向き’とはその上に描かれた矢印（ベクトル）$\boldsymbol{e}$ であると了解する．l_1, l_2 の上にはそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ というベクトルが指定されている．平面の‘向き’は，§8.5 の流儀でいけば，平面上に描かれた‘ぐるっとまわる矢印’のことであるが，これを次のように解釈しなおそう．まず平面上に2つのベクトル $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ を描く（図 9.3 (a)）．この2つのベクトルは互いに重なったり，あるいはちょうど反対方向を向いたりしていないとする．言いかえれば，一直線上にのってしまわないとする．（たとえば互いに直角に交わっていればよい．）このようなとき，$\boldsymbol{f}_1$ と $\boldsymbol{f}_2$ は**1次独立**であるという．平面の‘向き’とは，1次独立なベクトル $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ を並べる順序と解釈する．図 9.3 (b) の (i) のような向きの‘ぐるっとまわる矢印’には $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ という並べ方を対応させ，(b) の (ii) のような‘ぐるっとまわる矢印’には $(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1)$ という並べ方を対応させる．いま，平面にどちらかひとつの向きが指定されているとして，どちらかの並べ方，たとえば $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ を固定しておく．

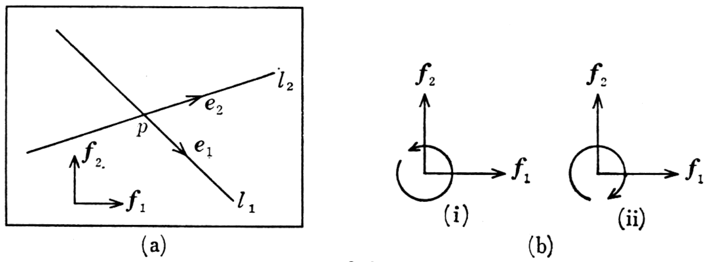


図 9.3

さて，図 9.3 (a) では直線 l_1, l_2 が点 p で交わっている．直線 l_1, l_2 の（この順序での）**点 p での交わりの符号** $(l_1 \cdot l_2)_p$ は次のように定義される．点 p で，l_1 上の矢印 $\boldsymbol{e}_1$ と l_2 上の矢印 $\boldsymbol{e}_2$ を考えると，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は1次独立である．l_1 上の矢印 $\boldsymbol{e}_1$ を先にして $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ を考える．この組 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ が固定しておいた $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ と同じ平面の向きを定めるとき交わりの符号は $+1$（プラス 1）であるとし，反対の向きを定めるとき交わりの符号は -1（マイナス 1）

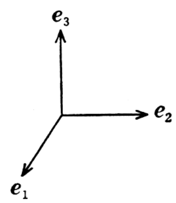
であるとする．正確に言えば $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ を1次独立性を保ったまま平面上を少しずつ動かしていき，$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ にこの順序で重ねられるとき $+1$，$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ の逆 $(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1)$ に重ねられるとき -1 とする．図 9.3 (a) の状況では，l_1 と l_2 の（この順序での）交わりの符号は $+1$ である：$(l_1 \cdot l_2)_p = +1$.

l_1 と l_2 を逆にして，l_2 と l_1 の（この順序での）交わりの符号を考えると，今度は $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)$ というベクトルの組を考えることになるから，交わりの符号は -1 になる：$(l_2 \cdot l_1)_p = -1$.

このように平面上で向きのついた2直線が交わるとき，交わりの符号は，直線 l_1, l_2 の順序に依存する．

4次元 $\boldsymbol{R}^4$ の中で2平面が交わっている状況では，$\boldsymbol{R}^4$ と2平面に，それぞれ‘向き’を指定しておかねばならない．平面の‘向き’の解釈は既にわかった．$\boldsymbol{R}^4$ の‘向き’はどう考えられるだろうか．いっぺんに $\boldsymbol{R}^4$ にいく前に $\boldsymbol{R}^3$ の‘向き’をはっきりさせておこう．

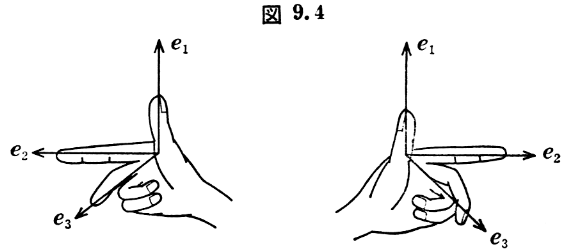
$\boldsymbol{R}^3$ でも，‘向き’は1次独立な3つのベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の並べ方である．ここで，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が1次独立とは，それらが1平面に（ぺちゃんこに）のってしまわないことである．ひと組のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ がある場合，その並べ方には6通りある．§8.5 で単体の向きを考えたときそうしたように，この6通りの並べ方のうち互いに偶置換で移り合えるものは $\boldsymbol{R}^3$ の同じ向きを定義するとし，奇置換で移り合うものは反対の向きを定義するものとする（図 9.4）.



$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$$
$$(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)$$

図 9.4

$\boldsymbol{R}^3$ の2つの向きには名前がついていて，図 9.4 の $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ で定義される向きを**右手向き**，$(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)$ で定義される向きを**左手向き**という．右手の親指，人差指，中指を，互いに直角に開いて3本のベクトルと思うと，（親指，人差指，中指）の決める向きが $\boldsymbol{R}^3$ の右手向きである．同じことを左手でやって（親指，人差指，中指）を考えると，こんどは左手向きが定義される（図 9.5）.



右手向き　　左手向き

図 9.5

前の §8.5 で，3単体の向きを4頂点 p_0, p_1, p_2, p_3 の並べ方として定義した．この‘向き’と，いま定義した‘向き’との間には次のような関係がある．$\langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$ を向きづけられた3単体とし，それが $\boldsymbol{R}^3$ の中に置かれているものとする．3つの矢印（ベクトル）$\langle p_0 p_1 \rangle$，$\langle p_0 p_2 \rangle$，$\langle p_0 p_3 \rangle$ は1次独立である．このベクトルをこの順に $(\langle p_0 p_1 \rangle, \langle p_0 p_2 \rangle, \langle p_0 p_3 \rangle)$ と並べたものは，上に述べた意味で $\boldsymbol{R}^3$ の向きを定義する．頂点 p_0, p_1, p_2, p_3 の並べ方は 24 通りあって，それらを 12 通りずつ2組に分けたが，各々の組はそれぞれ同一の $\boldsymbol{R}^3$ の向きを定義するのである．

$\boldsymbol{R}^4$ でも‘向き’の考え方は同じである．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ を1次独立な4個のベクトル（すなわち3次元空間に入ってしまわないような4個のベクトル）とし，その並べ方で‘向き’を指定する．

$\boldsymbol{R}^1, \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^3$ の向きでもみな同じことであるが，$\boldsymbol{R}^4$ の中の離れた所に2組の1次独立なベクトル（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$）と（$\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_4'$）があって，それぞれこの順に並べ方が指定されているとする．そのとき1次独立性を保ったまま一方を動かしていって他方の組（を偶置換で並べかえたもの）に重ね合わせられるとき，（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$）と（$\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_4'$）とは $\boldsymbol{R}^4$ の同一の‘向き’を定義すると約束するのである．

さて‘向き’の話が長くなったが，交わりの符号にもどる．$\boldsymbol{R}^4$ に2平面 Π_1, Π_2 があって，1点 p で交わっているものとする．Π_1 に向き（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$），$\Pi_2$ にも向き（$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$）を与えておく．$\boldsymbol{R}^4$ にも向き（$\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4$）が指定されているとする．

点 p で Π_1 上の矢印（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$）と Π_2 上の矢印（$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$）を考えこの順に並べる．すると（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$）は $\boldsymbol{R}^4$ に向きを定めるが，その向きがあらかじめ指定しておいた向き（$\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4$）に一致するとき，$\Pi_1, \Pi_2$ の（この順序での）p での交わりの符号 $(\Pi_1\cdot\Pi_2)_p$ を $+1$ と定め，一致しないとき -1 と定める．

平面上で直線 l_1, l_2 が交わるときは $(l_1\cdot l_2)_p = -(l_2\cdot l_1)_p$ であった．$\boldsymbol{R}^4$ では $(\Pi_1\cdot\Pi_2)_p$ と $(\Pi_2\cdot\Pi_1)_p$ の関係はどうなるだろうか．

$(\Pi_2\cdot\Pi_1)_p$ を考えるときには，（$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$）というベクトルの並べ方の決める向きで符号を計算する．ところが，（$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$）と（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$）とは $\boldsymbol{R}^4$ の同一の向きを定めることがわかる．実際，この2つは偶置換（この場合，4つの互換）で移り合える：

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) &\longrightarrow (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_2) && (\boldsymbol{f}_2 \text{ と } \boldsymbol{e}_1 \text{ の互換をした}) \\
&\longrightarrow (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_2) && (\boldsymbol{f}_2 \text{ と } \boldsymbol{e}_2 \text{ の互換}) \\
&\longrightarrow (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_2) && (\boldsymbol{f}_1 \text{ と } \boldsymbol{e}_1 \text{ の互換}) \\
&\longrightarrow (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) && (\boldsymbol{f}_1 \text{ と } \boldsymbol{e}_2 \text{ の互換})
\end{aligned}
$$

これから $(\Pi_1\cdot\Pi_2)_p = (\Pi_2\cdot\Pi_1)_p$ がわかる．4次元での2平面の交わりの符号は2平面の順序に無関係である．

これ以後，4次元 PL 多様体を $M, N, \cdots$ という記号で表わすことにする．

【定義】 4次元 PL 多様体 M が**向きづけ可能**であるとは，M の1点 p において，4個の1次独立なベクトル（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$）を任意にとり，（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$）をこの順序を変えず1次独立性を保ったまま M の勝手なループに沿って動かしたとき，もどってきた（$\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_4'$）が始めの（$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$）と同じ向きを定めることである．（$M$ は境界があってもなくてもよい．）

‘向きづけ可能性’のこのような定式化はすべての次元に通用する．とくに2次元では‘メビウスの帯を含まない’ことと同値である．

M が向きづけ可能なら，M のすべての位置に，互いに反対向きにならないように‘向き’

がいっせいに指定できる．M 上すべての点にこのような向きをいっせいに指定することを M を**向きづける**という．

M をこの意味で向きづけられた4次元多様体としよう．M の中に2つの2次元サイクル z_1, z_2 があるとする．z_1, z_2 は向きづけられた3角形の（整係数をつけた）有限和であった．z_1 と z_2 は一般的な位置関係にあると仮定しよう．すなわち，z_1 の3角形と z_2 の3角形がもし交わるなら，その2つの3角形は互いの内部でただ1点で交わるとするのである．この節の始めに，2つの平面が交わるとき，一方の平面をほんの少しずらせば2平面は一般的な交わり（1点での交わり）になることを注意した．2つのサイクルの場合も同様に，z_2 をほんの少しずらせて z_2' とすれば，z_1 と z_2' が一般的な位置関係になる．このとき，z_2' が再び2次元サイクルにとれること，また z_2' と z_2 とはホモローグであることが示せるが詳しい議論は省略する．いずれにせよ，z_1, z_2 が一般的な位置関係で交わっているとする．

z_1 の（向きづけられた）3角形 σ と，z_2 の（向きづけられた）3角形 τ とが内部 $\mathrm{Int}(\sigma)$, $\mathrm{Int}(\tau)$ の1点 p で交わるとき，平面の交わりの場合と同様にして，交わりの符号 $(\sigma\cdot\tau)_p$ が定義できる．σ の‘向き’を定める2つのベクトルと τ の‘向き’を定める2つのベクトルを並べたものが M の‘向き’と同じ向きを定めるか否かに従って $(\sigma\cdot\tau)_p = +1$ または -1 である．z_1, z_2 の中で，σ と τ の係数がそれぞれ m, n であるとしよう（すなわち，$z_1 = \cdots + m\sigma + \cdots$, $z_2 = \cdots + n\tau + \cdots$）．そのとき z_1 と z_2 の点 p における交わり数を $mn(\sigma\cdot\tau)_p$ によって定義する．この交わり数を，z_1 のすべての3角形と z_2 のすべての3角形の交点について加えたものを **z_1 と z_2 の交わり数**とよび，記号で $z_1\cdot z_2$ と書くことにする．（象徴的な説明図 9.6 (a) を見よ．）

z_1 に一般的な位置で交わるもうひとつの2次元サイクル z_3 がある場合，$z_1\cdot(z_2+z_3) = z_1\cdot z_2 + z_1\cdot z_3$ を示すことができる．この公式は直観的には図 9.6 (b) から明らかと思う．図 9.6 (b) の場合，$z_1\cdot(z_2+z_3)$ は p_1, p_2, p_3, p_4 における交わり数の和で，$z_1\cdot z_2, z_1\cdot z_3$ はそれぞれ p_1, p_2 における交わり数の和，p_3, p_4 における交わり数の和だからである．同様に $(z_1 + z_4)\cdot z_2 = z_1\cdot z_2 + z_4\cdot z_2$ を示すこともできる．

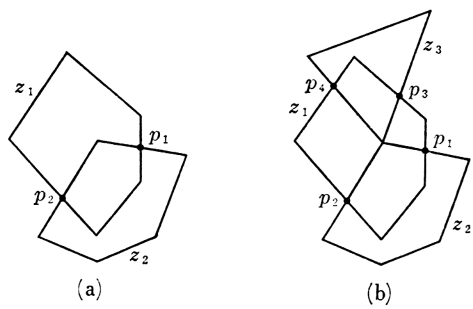


図 9.6　$z_1\cdot z_2 = p_1, p_2$ における交わり数の和

また，交わりの符号は4次元では順序に無関係であったから，交わり数の対称性 $z_1\cdot z_2 = z_2\cdot z_1$ がいえる．

2次元サイクル z_1, z_2 が一般的な位置関係にないときは，z_2 をほんの少し動かして z_1 と一般的な位置関係にある2次元サイクル z_2' にできる．そして $z_1\cdot z_2$ を $z_1\cdot z_2'$ により定義する．この値は z_2' のとり方に無関係なことも証明できる．さて次の補助定理が成り立つ．

【補助定理】　$\sigma = \langle p_0 p_1 p_2 p_3\rangle$ を M の中の向きづけられた3単体とし，$z_1 = \partial_3(\sigma)$ とする．このとき任意の2次元サイクル z_2 について，$z_1\cdot z_2 = 0$ である．

証明の概略　この節の始めに，3次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の中の2つの2次元平面の‘一般的な’交わり方はそれらが直線に沿って交わることであると言った．また $\boldsymbol{R}^4$ の中では，1点で交わることが‘一般的な’交わり方であるとも言った．一般に，m 次元の‘もの’と n 次元の‘もの’が l 次元の多様体の中で交わるとき，一般的な交わり方は $(m+n-l)$ 次元の‘もの’に沿って交わることである．2平面の場合は $m=n=2$，そして $\boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{R}^4$ ではそれぞれ $l=3, 4$ であるから $(m+n-l)=1, 0$ となって，始めに述べた $\boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{R}^4$ の場合の注意に合っている．

M（4次元多様体）の中で，3単体と2次元サイクルが交わるとき，一般的な交わり方は $(3+2-4)=1$ 次元の‘もの’に沿って交わることである．このことを頭においた上で，3単体 $\langle p_0p_1p_2p_3\rangle$ と2次元サイクル z_2 の交わりを考えよう．

まず，最も簡単な場合，$\langle p_0p_1p_2p_3\rangle$ が2次元サイクル z_2 の中の3角形 σ と，σ の内部 $\mathrm{Int}(\sigma)$ の線分 $|pq|$ で交わる場合を考える．図 9.7 では見やすいように3単体と σ とを離して描いてある．線分 pq の両端 p, q が $\partial_3(\langle p_0p_1p_2p_3\rangle)$ と σ との交点になる．図 9.7 (a) では p は辺単体 $|p_0p_1p_3|$ の上にあり，q は $|p_1p_2p_3|$ の上にあるとしている．$\partial_3(\langle p_0p_1p_2p_3\rangle)$ は2次元サイクルであって，3角形 $|p_0p_1p_3|$ と $|p_1p_2p_3|$ には同じ向きの‘ぐるっとまわる矢印’が与えられているはずである．これを‘ベクトルによる向き’の定義で解釈すれば，図 9.7 (a) に示されたように，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ と $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')$ がそれぞれ $|p_0p_1p_3|$, $|p_1p_2p_3|$ の向きを与えていると考えることができる．σ の方では，図 9.7 (a) のような $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ が σ の向きを与えているものとする．点 p と q における交わりの符号を計算しよう．M には，あらかじめ $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4)$ という向きが指定されているとする．

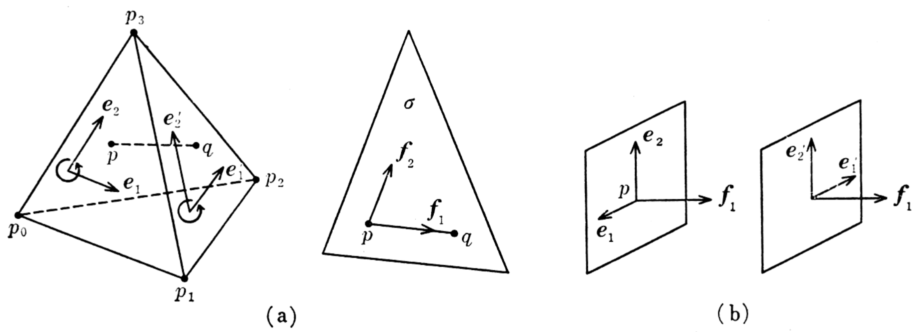


図 9.7

定義により，点 p における交わりの符号 $(\langle p_0p_1p_3\rangle\cdot\sigma)_p$ は，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ という向きと $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4)$ を比べて決められ，点 q における交わりの符号 $(\langle p_1p_2p_3\rangle\cdot\sigma)_q$ は $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ という向きと $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4)$ を比べて決められる．ところが $\boldsymbol{f}_1$ は p から q に向かう矢印であるから図 9.7 (b) で見るように，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1)$ と $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{f}_1)$ とは3次元空間で互いに反対の向きを定める．したがって $\boldsymbol{R}^4$ でも，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ と $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ とは互いに反対の向きを定める．これは $(\langle p_0p_1p_3\rangle\cdot\sigma)_p = -(\langle p_1p_2p_3\rangle\cdot\sigma)_q$ を意味している．p, q における $\partial_3(\langle p_0p_1p_2p_3\rangle)$ と σ との交わり数はお互いに打ち消し合うのである．

3単体 $\langle p_0p_1p_2p_3\rangle$ と2次元サイクル z_2 の交わりは，一般にはもう少し複雑である．たと

えば有限個の折れ線や円周などになる場合もある．円周になる場合は，それは Int $|p_0p_1p_2p_3|$ に入っているとしてよく，境界 $\partial_3(\langle p_0p_1p_2p_3\rangle)$ と z_2 の交わりには寄与しない．また折れ線になる場合にはその両端での交わり数は上と同様に打ち消し合う．さらに複雑な交わり（いずれも1次元としてよい）の場合にも，原理的には同じ議論が通用して $(\partial_3(\langle p_0p_1p_2p_3\rangle))\cdot z_2=0$ が示せる．補助定理の証明終り．

【補助定理の系】 c を任意の3次元鎖とすれば $(\partial_3(c))\cdot z_2=0$ がわかる．

なぜなら $c=\sum_{i=1}^{k} m_i\sigma_i$ （σ_i は向きづけられた3単体）のとき，

$$(\partial_3(c))\cdot z_2=\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\partial_3(\sigma_i)\right)\cdot z_2=\sum_{i=1}^{k} m_i(\partial_3(\sigma_i)\cdot z_2)$$

であり，$\partial_3(\sigma_i)\cdot z_2$ は上の補助定理で0になるから．

z_1, z_1', z_2 を2次元サイクルとし，z_1, z_1' はホモローグ（$z_1 \backsim z_1'$）とする．ホモローグの定義から $z_1-z_1'=\partial_3(c)$ （c は3次元鎖）と書ける．すると $(z_1-z_1')\cdot z_2=(\partial_3(c))\cdot z_3=0$ （補助定理の系）．これを書き変えて $z_1\cdot z_2=z_1'\cdot z_2$ を得る．同様に $z_2 \backsim z_2'$ であれば，$z_1'\cdot z_2=z_1'\cdot z_2'$ もわかる．結局，交わり数 $z_1\cdot z_2$ は z_1, z_2 の属するホモロジー類にしか依存しない．こうして，ξ_1, ξ_2 が $H_2(M)$ の2要素（2つのホモロジー類）であるとき，その交わり数 $\xi_1\cdot\xi_2$ という整数が定義できたことになる．$\xi_1=[z_1]$，$\xi_2=[z_2]$ のとき $\xi_1\cdot\xi_2=z_1\cdot z_2$ とおけばよい．次の定理が得られた．

【定理 9.1】 M を向きづけられた4次元多様体とする．そのとき $H_2(M)$ の勝手な2要素 ξ_1, ξ_2 について，その交わり数 $\xi_1\cdot\xi_2$ とよばれる整数が定義できる．それは次の性質をもつ．

（i） $\xi_1\cdot\xi_2=\xi_2\cdot\xi_1$

（ii） $(\xi_1+\xi_1')\cdot\xi_2=\xi_1\cdot\xi_2+\xi_1'\cdot\xi_2$，また $\xi_1\cdot(\xi_2+\xi_2')=\xi_1\cdot\xi_2+\xi_1\cdot\xi_2'$．

‘ベクトルの内積’を御存知の読者には，(i), (ii) はベクトルの内積と似た性質であることがわかると思う．

§9.2 符 号 数

M を向きづけられた4次元多様体とする．前の § で $H_2(M)$ の要素の間に，交わり数という一種の‘内積’が定義された．これから M の**符号数** (signature) とよばれる重要な不変量が導き出せる．

まず，ホモロジー群 $H_2(M)$ は有限生成アーベル群であることを注意しておこう．我々は始めから PL 多様体はすべて有限多面体であると仮定しておいた (cf. §6.2)．したがって，M の有限複体による分割 K をとれば，K の2単体の個数は有限であって，$C_2(K)$ は有限生成アーベル群である．有限生成アーベル群の部分群や剰余群は再び有限生成アーベル群になるという定理 (cf. [8] §11) によって $H_2(K)$ $(=H_2(M))$ が有限生成アーベル群になることがわかる．

§8.4 で述べた有限生成アーベル群に関する定理によれば，任意の有限生成アーベル群は‘有

限階数の自由アーベル群' と '有限アーベル群' T の直和になる. よって $H_2(M)$ は $H_2(M) = \boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z} \oplus T$ と書き表わせる. ($\boldsymbol{Z}$ の個数を M の **2次元ベッチ数**とよぶこともある.) ここに現われた T は $H_2(M)$ の有限部分群である. T の任意の要素 t と $H_2(M)$ の任意の要素 ξ の交わり数 $\xi \cdot t$ は0になることを示そう.

$H_2(M)$ の要素 ξ を任意にひとつとり固定する. $t \in T$ に対し $\xi \cdot t \in \boldsymbol{Z}$ を対応させる写像を考えると, ξ は $T \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ という準同型写像を定める. (なぜなら $\xi \cdot (t_1 + t_2) = \xi \cdot t_1 + \xi \cdot t_2$.) よってその像 $\xi \cdot T$ は $\boldsymbol{Z}$ の部分群である (§7.2 の補助定理). T は有限群だからその像 $\xi \cdot T$ も有限群, ところが $\boldsymbol{Z}$ の有限部分群は (容易にわかるように) $\{0\}$ しかない. よって $\xi \cdot T = \{0\}$. いいかえれば $\xi \cdot t = 0$ が示されたことになる.

この事実から, 剰余群 $H_2(M)/T$ に移っても, その要素の間の交わり数が定義できることがわかる. この剰余群は自由アーベル群 $\boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}$ であるから, 剰余群に移った方が都合がよい.

以下, '符号数' を説明するため少し一般論を展開する.

【定義】 H を有限階数の自由アーベル群とする. H の直積 $H \times H$ から $\boldsymbol{Z}$ への写像 h: $H \times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ が**対称双1次形式**であるとは

(i) $h(x, y) = h(y, x)$

(ii) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$,　　$h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$

という2つの条件が, 任意の $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$ について成り立つことである.

注意　条件 (ii) から $h(mx, ly) = mlh(x, y)$ ($m, l \in \boldsymbol{Z}$) がわかる.

《例》 H を剰余群 $H_2(M)/T$ とする. $h: H \times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を $h(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ (交わり数) と定義すれば, h は対称双1次形式になる (定理 9.1). h を M の**交点形式**とよぶ.

H を階数 n の自由アーベル群とする: $H \cong \boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}$ (n 個の直和). 各々の $\boldsymbol{Z}$ に対応する生成元を $a_1, a_2, \cdots, a_n$ とすれば, H の任意の要素 x は

$$x = m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n \qquad (m_i \in \boldsymbol{Z})$$

と一意的に書き表わせる. H の要素同士の足し算は, この係数同士の足し算である. H は, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ という n 個の '記号' に整数係数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ をつけて加えた形式的な和の全体と考えられる.

この係数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ の範囲を有理数係数にまで広げて, $q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_n a_n$ ($q_i \in \boldsymbol{Q}$) という形式的な和を考える. そのような形式和の全体のなす集合を $\boldsymbol{Q}H$ と書くことにしよう.

繰り返せば, $\boldsymbol{Q}H$ の任意の要素 x は, $x = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_n a_n$ ($q_i \in \boldsymbol{Q}$) という形式和である. また $x = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_n a_n$ と $y = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n$ ($q_i, r_i \in \boldsymbol{Q}$) とは加えることができて, $x + y = (q_1 + r_1) a_1 + (q_2 + r_2) a_2 + \cdots + (q_n + r_n) a_n$ である. さらに $x = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_n a_n$ を有理数倍することもできて, $r \in \boldsymbol{Q}$ のとき $rx = (rq_1) a_1 + (rq_2) a_2 + \cdots + (rq_n) a_n$ となる.

$\boldsymbol{Q}H$ のように足し算と有理数倍のできる集合を **$\boldsymbol{Q}$ 上のベクトル空間**とよぶ. 上のように,

$\boldsymbol{Q}H$ のすべての要素が $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に有理数係数をつけて加えた形式和として一意的に表わされるとき，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を $\boldsymbol{Q}H$ の**基底**，a_i の個数 n を $\boldsymbol{Q}H$ の**次元**という．$n=\dim(\boldsymbol{Q}H)$ と書き表わす．始めの自由アーベル群 H は $\boldsymbol{Q}H$ の中に‘埋め込まれて’しまった．(ちょうど $\boldsymbol{Z}$ が $\boldsymbol{Q}$ に埋め込まれているように．)

さて自由アーベル群 H と対称双1次形式 $h: H\times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ が与えられているとする．h は“生成元 $a_1, \cdots, a_n$ の上での値 $h(a_i, a_j)=h_{ij}\in \boldsymbol{Z}$ が決まれば完全に決まる”ことに注意しよう．実際，その場合，H の任意の2要素 $x=m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n$ と $y=l_1a_1+l_2a_2+\cdots+l_na_n$ ($m_i, l_j\in \boldsymbol{Z}$) について，

$$h(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} m_i l_j h(a_i, a_j)$$

となるからである．(この計算には，対称双1次形式の定義の条件 (ii) と定義の後の注意を使った．)

これを念頭において，与えられた $h: H\times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を次のようにして $\tilde{h}: (\boldsymbol{Q}H)\times(\boldsymbol{Q}H) \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ に‘拡張’することができる．$\boldsymbol{Q}H$ の任意の要素は $q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n$ ($q_i\in \boldsymbol{Q}$) という形式和であった．$\boldsymbol{Q}H$ の任意の2要素 $x=q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n$，$y=r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n$ に対し

$$\tilde{h}(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} q_i r_j h(a_i, a_j)$$

とおくのである．こうして定めた $\tilde{h}: (\boldsymbol{Q}H)\times(\boldsymbol{Q}H) \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ も対称双1次形式の条件 (i), (ii) と同じ性質をもつことはすぐわかる．さらに

(iii)　$\tilde{h}(rx, y)=r\tilde{h}(x,y)=\tilde{h}(x, ry)$　　($r\in \boldsymbol{Q}$,　$x, y\in \boldsymbol{Q}H$)

という性質も確かめられる．(i), (ii), (iii) の性質をもつ $\tilde{h}$ を **$\boldsymbol{Q}$ 上の対称双1次形式**とよぶ．

【定義】 $\boldsymbol{Q}$ 上の対称双1次形式 $\tilde{h}: (\boldsymbol{Q}H)\times(\boldsymbol{Q}H) \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ が**非退化**とは，$\boldsymbol{Q}H$ の0でない任意の要素 x に対して $\tilde{h}(x,y)\neq 0$ となる $y\in \boldsymbol{Q}H$ が存在することである．

【補助定理】 $\tilde{h}: (\boldsymbol{Q}H)\times(\boldsymbol{Q}H) \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ が非退化の対称双1次形式のとき，$\boldsymbol{Q}H$ の基底 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ をうまくとって，

$$\tilde{h}(b_i, b_j)=0 \qquad i\neq j$$
$$\tilde{h}(b_i, b_i)\neq 0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

が成り立つようにできる．($\tilde{h}$ の**対角化**という．)

証明　$n=\dim(\boldsymbol{Q}H)$ に関する数学的帰納法で証明する．

$n=1$ のときは $\boldsymbol{Q}H$ の任意の要素は，ある要素 a_1 の有理数倍である．もし $\tilde{h}(a_1, a_1)=0$ なら，すべての要素 $x=qa_1$，$y=ra_1$ について $\tilde{h}(x,y)=qr\tilde{h}(a_1,a_1)=0$ となり，$\tilde{h}$ が非退化であることに反する．よって $\tilde{h}(a_1,a_1)\neq 0$．$b_1=a_1$ とおけば，補助定理が成り立つ．これで $n=1$ の場合は OK.

$n-1$ まで補助定理が証明されたとして，n の場合を証明しよう．$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を $\boldsymbol{Q}H$ の基底とする．

ケース 1　$\tilde{h}(a_i, a_i) \neq 0$ であるような a_i が存在する場合.

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の番号をつけかえて，a_1 がそのような性質をもつと仮定してよい．$\tilde{h}(a_1, a_1) = s_{11} \neq 0$ とおく．また，$\tilde{h}(a_1, a_i) = s_{1i}$ $(i = 2, \cdots, n)$ とおく．

QH の新しい基底 $b_1, a_2', \cdots, a_n'$ を次のように定める．

$$b_1 = a_1, \quad a_i' = a_i - \frac{s_{1i}}{s_{11}}a_1, \quad i = 2, 3, \cdots, n.$$

実際に $b_1, a_2', \cdots, a_n'$ が QH の基底であることを示そう．そのためには，QH の任意の要素が，$b_1, a_2', \cdots, a_n'$ に有理係数をつけて加えた和として一意的に表わされることを見ればよい．上の定義式を書きなおして

$$a_1 = b_1, \quad a_i = a_i' + \frac{s_{1i}}{s_{11}}b_1, \quad i = 2, 3, \cdots, n$$

を得る．$a_1, \cdots, a_n$ のどれも $b_1, a_2', \cdots, a_n'$ に有理係数をつけた和になっている．$a_1, \cdots, a_n$ は QH の基底であると仮定したのだから QH のどんな要素も $a_1, \cdots, a_n$ に有理係数をつけた和である．この2つの事実をあわせて，QH の任意の要素が $b_1, a_2', \cdots, a_n'$ に有理係数をつけた和で表わせることがわかった．その表わし方が一意的であることは次のように示される．

$r_1, r_2, \cdots, r_n$ を有理数として $r_1b_1 + r_2a_2' + \cdots + r_na_n' = 0 \in QH$ なら $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$ であることを見ればよい．b_1, a_i' を $a_1, \cdots, a_n$ による定義式でおきかえて，

$$r_1a_1 + r_2\left(a_2 - \frac{s_{12}}{s_{11}}a_1\right) + \cdots + r_n\left(a_n - \frac{s_{1n}}{s_{11}}a_1\right) = 0$$

$$\therefore \quad \left(r_1 - \frac{r_2s_{12}}{s_{11}} - \cdots - \frac{r_ns_{1n}}{s_{11}}\right)a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n = 0$$

この式と $a_1, \cdots, a_n$ が基底であることから $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$ がわかる．

以上で $b_1, a_2', \cdots, a_n'$ が確かに QH の新しい基底になっていることがわかった．この基底の間の $\tilde{h}$ の値を計算してみよう．

$\tilde{h}(b_1, b_1) = \tilde{h}(a_1, a_1) = s_{11} \neq 0,$

$\tilde{h}(b_1, a_i') = \tilde{h}\left(a_1, a_i - \frac{s_{1i}}{s_{11}}a_1\right) = \tilde{h}(a_1, a_i) - \frac{s_{1i}}{s_{11}}\tilde{h}(a_1, a_1) = s_{1i} - \frac{s_{1i}}{s_{11}} \cdot s_{11} = 0, \quad i = 2, \cdots, n.$

$a_2', \cdots, a_n'$ に有理係数をつけて加えた和の全体を QH' とすると，$\dim QH' = n-1$. そして $\tilde{h}$ は QH' の上で非退化なことがわかる．ここで数学的帰納法の仮定を使うと QH' には $b_2, \cdots, b_n$ という基底がとれて，$\tilde{h}(b_i, b_j) = 0$ $(i \neq j)$，$\tilde{h}(b_i, b_i) \neq 0$ $(i = 2, \cdots, n)$ となる．

$\tilde{h}(b_1, a_i') = 0$ $(i = 2, \cdots, n)$ ということから，QH' の任意の要素 x について $\tilde{h}(b_1, x) = 0$ である．とくに $\tilde{h}(b_1, b_i) = 0$, $i = 2, \cdots, n$.

以上で $b_1, b_2, \cdots, b_n$ が補助定理の主張する基底であることがわかった．

ケース 2　$\tilde{h}(a_i, a_i) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の場合.

もし，すべての i と j $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ について $\tilde{h}(a_i, a_j) = 0$ となるとしたら，すべての $x, y \in QH$ について $\tilde{h}(x, y) = 0$ でなければならない．(x, y は $a_1, \cdots, a_n$ の係数つき

の和だから.）$\tilde{h}$ は非退化と仮定したので，こんなことはあり得ない．よってどれかの a_i と a_j について $\tilde{h}(a_i, a_j) \neq 0$ である．番号をつけかえて $\tilde{h}(a_1, a_2) \neq 0$ と仮定しよう．新しい基底 $b_1, a_2', \cdots, a_n'$ を次のように決める．

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad a_i' = a_i, \quad i = 2, 3, \cdots, n.$$

$b_1, a_2', \cdots, a_n'$ が基底であることは前と同様に調べればすぐわかる．そして今度は

$$\tilde{h}(b_1, b_1) = \tilde{h}(a_1+a_2, a_1+a_2) = \tilde{h}(a_1, a_1) + \tilde{h}(a_1, a_2) + \tilde{h}(a_2, a_1) + \tilde{h}(a_2, a_2)$$
$$= \tilde{h}(a_1, a_2) + \tilde{h}(a_2, a_1) = 2\tilde{h}(a_1, a_2) \neq 0.$$

よってケース1の場合に帰着された．補助定理の証明終り．

$\tilde{h}: (\boldsymbol{Q}H) \times (\boldsymbol{Q}H) \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ を非退化な対称双1次形式とする．補助定理により，$\tilde{h}$ を対角化する基底 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ がとれる．この基底を使って $\boldsymbol{Q}H$ の要素を $x = q_1b_1 + q_2b_2 + \cdots + q_nb_n$, $y = r_1b_1 + r_2b_2 + \cdots + r_nb_n$ $(q_i, r_i \in \boldsymbol{Q})$ などと表わしておくと，$\tilde{h}(b_i, b_j) = 0$ $(i \neq j)$ を利用して，

$$\tilde{h}(x, y) = s_1q_1r_1 + s_2q_2r_2 + \cdots + s_nq_nr_n$$

と，簡単に $\tilde{h}$ の値が計算できることに注意しよう．ここに

$$s_1 = \tilde{h}(b_1, b_1), \quad s_2 = \tilde{h}(b_2, b_2), \quad \cdots, \quad s_n = \tilde{h}(b_n, b_n)$$

である．

さて，補助定理の主張から $s_1, s_2, \cdots, s_n$ はすべて0でない．$s_1, s_2, \cdots, s_n$ のうち ＋（プラス）のものが p 個，－（マイナス）のものが q 個あったとする（$p + q = n$）．

【定義】 差 $p - q$ を非退化な対称双1次形式 $\tilde{h}$ の**符号数**（signature）とよぶ．記号で $\mathrm{sign}(\tilde{h})$ と表わそう．

p も q も一見，基底 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ の選び方に依存するように見えるが，実はそうではない．次のよく知られた古典的定理がそれを保証している．

【定理】（シルベスター） p および q は，$\tilde{h}: (\boldsymbol{Q}H) \times (\boldsymbol{Q}H) \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ だけで決まり，$\tilde{h}$ を対角化する基底 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ の選び方によらない．

この定理によって，$\mathrm{sign}(\tilde{h})$ という記号法が正当化される．

$\tilde{h}: (\boldsymbol{Q}H) \times (\boldsymbol{Q}H) \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ は，もともと $h: H \times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を $\boldsymbol{Q}$ 係数に拡張したものだった．$\tilde{h}$ が非退化のときもとの h も非退化であるということにしよう．また，h の符号数とは，$\boldsymbol{Q}$ 係数に拡張した $\tilde{h}$ の符号数 $\mathrm{sign}(\tilde{h})$ のことであると定義してしまおう．h の符号数も記号で $\mathrm{sign}(h)$ と書くことにする．

向きづけられた4次元多様体 M にもどる．交わり数によって，交点形式とよばれる対称双1次形式 $h: H \times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ が定まった．ここに $H = H_2(M)/T$．次の定理がある．

【定理】 M が境界をもたない4次元多様体なら，交点形式 $h: H \times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ は非退化である．

この定理は，ポアンカレの双対定理とよばれる基本的な定理の特別の場合である．証明は省略する．

この定理から，交点形式 $h: H \times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ $(H = H_2(M)/T)$ は非退化な対称双1次形式

になり，その符号数 sign(h) が考えられる．

【定義】 M が境界のない，向きづけられた4次元多様体のとき，その交点形式 h の符号数を M **の符号数**といい，sign(M) という記号で表わす．

2次元のトポロジーでは，オイラー標数が閉曲面の分類に決定的な役割を果たした（cf. §6.4）．4次元のトポロジーでは，ここで定義された符号数 sign(M) が中心的役割を演ずる．

§9.3　符号数の性質

‘閉曲面’という術語にならって，境界のない4次元多様体を，4次元閉多様体とよぶことにする．

符号数 sign(M) は向きづけられた4次元閉多様体 M の不変量であるが，その最も簡単な性質は，M の‘向き’を逆にすると符号数も $-$sign(M) に変わることである．M と同じ多様体に，M とは逆の‘向き’を与えたものを $-M$ と書くことにすると，次の公式がそれである．

【公式 1】 $\mathrm{sign}(-M)=-\mathrm{sign}(M)$.

実際，2次元サイクル z_1, z_2 の交点の任意のひとつを p_0 とする．p_0 での交わりの符号は M の全体の‘向き’を反対にすると符号が変わる．したがって，交わり数 $z_1\cdot z_2$ も $-z_1\cdot z_2$ に変わる．これは交点形式 $h:H\times H\longrightarrow \boldsymbol{Z}$ が $-h$ に変わることを意味している．符号数は，$\tilde{h}$ を対角化する QH の基底 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ をとって，$\tilde{h}(b_1, b_1), \tilde{h}(b_2, b_2), \cdots, \tilde{h}(b_n, b_n)$ の中のプラスのものの個数 p からマイナスのものの個数 q をひいたもの（$p-q$）だった．いま $\tilde{h}$ が $-\tilde{h}$ に変われば，プラスのものが q 個になりマイナスのものが p 個になる．よって符号数は $q-p=-(p-q)$ に変わる．これで公式1が証明できた．

符号数はまた連結和（cf. 図 6.25）とうまい具合に関連している．前に §6.4 で連結和 $M\# N$ を説明したときは，M と N の‘向き’などは考慮に入れなかった．M と N が向きづけられた多様体の場合には，M, N から n 次元円板の内部を取り去って PL 同形 f: $\partial(M-\mathrm{Int}\,\Delta^n)\longrightarrow\partial(N-\mathrm{Int}\,\Delta^n)$ ではり合わせるとき，f をうまくとって，できた $M\# N$ に，M と N の両方の‘向き’と同じ向きが入るようにすることができるのである．向きづけられた多様体同士の連結和は，いつもこうなるようにしておくものとする．

【公式 2】 M, N を向きづけられた4次元閉多様体とすると，$\mathrm{sign}(M\# N)=\mathrm{sign}(M)+\mathrm{sign}(N)$.

公式2を説明する基礎になるのは，次の定理である．

【定理】（マイヤー－ヴィエトリス，Mayer-Vietoris）X, Y を多面体，$X\cap Y$ を両方の部分多面体とする．$H_1(X\cap Y)\cong\{0\}$，$H_2(X\cap Y)\cong\{0\}$ なら，$H_2(X\cup Y)\cong H_2(X)\oplus H_2(Y)$ である．

本来のマイヤー－ヴィエトリスの定理は，これよりずっと広い定理であるが，我々に必要な所だけを述べた．この定理を応用するため，次のことを注意しておく．

Σ^3 を3次元 PL 球面とすれば，$H_1(\Sigma^3) \cong \{0\}$，また $H_2(\Sigma^3) \cong \{0\}$ である．

説明: 前に（§3.2 の最後）Σ^3 から1点 p を取り除くと，$\boldsymbol{R}^3$ に位相同形になることを注意しておいた．これを使って $\pi_1(\Sigma^3, x_0) \cong \{e\}$ を示そう．x_0 を Σ^3 の任意の1点とし x_0 を基点とするループ φ を考える．φ を折れ線で'近似'しておく．この折れ線は p を通らないとしてよい．すると，この折れ線は $\boldsymbol{R}^3$ と位相同形な部分 $\Sigma^3-\{p\}$ に入ってしまい，1点に縮んでしまうことがわかる．よって $\pi_1(\Sigma^3, x_0) \cong \{e\}$ である．$H_1(\Sigma^3)$ はこれの可換化だから $H_1(\Sigma^3) \cong \{0\}$ である．

$H_2(\Sigma^3) \cong \{0\}$ もほぼ同様のアイデアで示すことができる．z を Σ^3 の2次元サイクルとすれば，z は p を含まないとしてよい（含めば z を少しずらす）．すると z は $\boldsymbol{R}^3$ と位相同形な部分 $\Sigma^3-\{p\}$ に入ってしまう．$\boldsymbol{R}^3$ と1点とはホモトピー同値であることが示せ，H_2 はホモトピー不変性をもつから，$H_2(\boldsymbol{R}^3) \cong H_2(1\text{点}) \cong \{0\}$．よって z は $\boldsymbol{R}^3$ と位相同形な部分で0にホモローグになってしまうのである．こうして $H_2(\Sigma^3) \cong \{0\}$ も説明できた．

これから直ちに $H_2(M) \cong H_2(M-\mathrm{Int}\,\Delta^4)$ がわかる．なぜなら，$M=(M-\mathrm{Int}\Delta^4) \cup \Delta^4$ で，共通部分 $(M-\mathrm{Int}\,\Delta^4) \cap \Delta^4$ は $\partial\Delta^4=\Sigma^3$ であるから，マイヤー－ヴィエトリスの定理の仮定 $H_1(\Sigma^3) \cong 0$, $H_2(\Sigma^3) \cong 0$ が満たされる．したがって $H_2(M) \cong H_2(M-\mathrm{Int}\,\Delta^4) \oplus H_2(\Delta^4)$ である．ところが Δ^4 は1点とホモトピー同値なことが示せ（1点は Δ^4 の変形レトラクトである），H_2 のホモトピー不変性から $H_2(\Delta^4) \cong H_2(1\text{点}) \cong \{0\}$ になる．よって，主張したように

$$H_2(M) \cong H_2(M-\mathrm{Int}\,\Delta^4) \oplus H_2(\Delta^4) \cong H_2(M-\mathrm{Int}\,\Delta^4)$$

が成り立つ．

M と N の連結和 $M\# N$ は $(M-\mathrm{Int}\,\Delta^4)$ と $(N-\mathrm{Int}\,\Delta^4)$ を境界の Σ^3 に沿ってはり合わせたものだから，ここで再びマイヤー－ヴィエトリスの定理が使えて

$$H_2(M\# N) \cong H_2(M-\mathrm{Int}\,\Delta^4) \oplus H_2(N-\mathrm{Int}\,\Delta^4) \cong H_2(M) \oplus H_2(N)$$

となることがわかる．

M の2つの2次元サイクル z_1, z_2 の交わりの様子は，M の中で考えても $M\# N$ の中で考えても同じである．よって $\xi_1, \xi_2 \in H_2(M)$ の交わり数 $\xi_1 \cdot \xi_2$ は，ξ_1, ξ_2 を上の同型 $H_2(M\# N) \cong H_2(M) \oplus H_2(N)$ によって $H_2(M\# N)$ の要素と思っても変わらない．同様に $\eta_1, \eta_2 \in H_2(N)$ の交わり数 $\eta_1 \cdot \eta_2$ も η_1, η_2 を $H_2(M\# N)$ の要素と思っても不変である．M のサイクル z_1 と N のサイクル z_2 とは $M\# N$ の中で全く離れた所に交わらずにあると考えられるので，$\xi \in H_2(M)$, $\eta \in H_2(N)$ の，$H_2(M\# N)$ の要素としての交わり数は $\xi \cdot \eta = 0$ である．

$H_2(M)$, $H_2(N)$ の有限アーベル部分群を T, T' とすると $H_2(M\# N)$ の有限アーベル部分群は $T \oplus T'$，そして $H_2(M\# N)/(T \oplus T') \cong H_2(M)/T \oplus H_2(N)/T'$ が成り立つ．

以上の事実をまとめるため，次の言葉使いを導入しておく．

【定義】 H, L を自由アーベル群，$h:(H\oplus L)\times(H\oplus L) \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を対称双1次形式とする．もし H の任意の要素 ξ，L の任意の要素 η について $h(\xi, \eta)=0$ が成り立つなら，H

と L は h **に関して直交する**という．また，h を H に‘制限’した対称双1次形式を h_1: $H \times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$, L に‘制限’した対称双1次形式を $h_2 : L \times L \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ とすると，h は h_1 と h_2 の**直交和**であるという．

ここに h を H に‘制限’した $h_1 : H \times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ とは，$\xi_1, \xi_2 \in H$ について $h_1(\xi_1, \xi_2) = h(\xi_1, \xi_2)$ とおいて得られる対称双1次形式である．h_2 の意味も同様である．

この言葉を使えば，上で述べた事実は，$M \# N$ の交点形式は M の交点形式と N の交点形式の直交和である，と言い表わすことができる．

一般に，2つの非退化対称双1次形式 h_1, h_2 があるとき，その直交和 h の符号数は h_1, h_2 それぞれの符号数の和になる．なぜなら h_1 を対角化する（$\boldsymbol{Q}H$ の）基底を $b_1, b_2, \cdots, b_m$, h_2 を対角化する（$\boldsymbol{Q}L$ の）基底を $c_1, c_2, \cdots, c_n$ とすれば $b_1, b_2, \cdots, b_m, c_1, c_2, \cdots, c_n$ が h を対角化する（$\boldsymbol{Q}(H \oplus L)$ の）基底になるからである．$\tilde{h}_1(b_1, b_1), \cdots, \tilde{h}_1(b_m, b_m)$ の中に，プラスのもの p_1 個，マイナスのもの q_1 個あり，また $\tilde{h}_2(c_1, c_1), \cdots, \tilde{h}_2(c_n, c_n)$ の中にプラスのもの p_2 個，マイナスのもの q_2 個があるとすれば $\tilde{h}(b_1, b_1), \cdots, \tilde{h}(b_m, b_m), \tilde{h}(c_1, c_1), \cdots, \tilde{h}(c_n, c_n)$ の中にはプラスのもの，マイナスのものそれぞれ p_1+p_2, q_1+q_2 個あることになって符号数 $p_1+p_2-(q_1+q_2)$ が和 $(p_1-q_1)+(p_2-q_2)$ になるのである．こうして $\mathrm{sign}(M \# N) = \mathrm{sign}(M) + \mathrm{sign}(N)$ が証明できた．

§9.4　符号数の計算例

1)　$S^2 \times S^2$

前に §6.2 で，2次元 PL 球面を Σ^2 で表わした．しかし著者自身はこの記号があまり好きでないので，以後2次元 PL 球面を S^2 と書き表わす．また同じ §6.2 で，2次元 PL 円板を Δ^2 と書いたが，これも D^2 という記号に改める．S^2 や D^2 は第4章では‘通常の’球面や円板を表わすのに使った．（‘通常の’球面とは，$\boldsymbol{R}^3$ の1点から等距離にある点の全体がなす‘滑らかな’球面のこと．同様に，‘通常の’円板とは，平面上1点から，ある距離以下の点の全体，すなわち‘滑らかな’境界をもつ円板である．）今後は S^2, D^2 を2次元 PL 球面，2次元 PL 円板の意味にしか使わないから混乱の恐れはないと思う．

S^2 は向きづけ可能な閉曲面であるから（cf. §6.4），その直積 $S^2 \times S^2$ は（向きづけ可能な）4次元閉多様体である（cf. §6.2）．$S^2 \times S^2$に適当な向きを与えて $\mathrm{sign}(S^2 \times S^2)$ を計算しよう．

まず $H_2(S^2 \times S^2)$ を知る必要がある．そのため $S^2 \times S^2$ を次のように分解するのがよい．S^2 は図9.8 のように北半球 $D^2{}_+$, 南半球 $D^2{}_-$ という2つの円板に分割できる．$D^2{}_+$ と $D^2{}_-$ の共通部分 $D^2{}_+ \cap D^2{}_-$ は円周 S^1 に PL 同形な‘赤道’である．（本来，S^2 は多面体であるから，図 9.8 のように‘滑らか’で

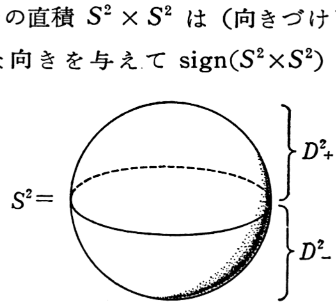


図 9.8

なく，もう少しゴツゴツしているはずである．しかし，その多面体が，たくさんの非常に細かい3角形や線分から構成されていると考えれば，図 9.8 のように‘一見滑らかそうに’描いても間違いではなかろう．ちょうど，非常に辺数の多い正多角形が滑らかな円周にみえるようなものである．）直積 $S^2\times S^2$ の2つの S^2 を区別して，$S^2{}_a\times S^2{}_b$ としておこう．$S^2{}_a, S^2{}_b$ をそれぞれ上のように2つの円板に分解して $S^2{}_a=D_{a+}\cup D_{a-}$，$S^2{}_b=D^2{}_{b+}\cup D^2{}_{b-}$ としておく．すると直積 $S^2{}_a\times S^2{}_b$ は

$$S^2{}_a\times S^2{}_b=(D^2{}_{a+}\times D^2{}_{b+})\cup(D^2{}_{a+}\times D^2{}_{b-})\cup(D^2{}_{a-}\times D^2{}_{b+})\cup(D^2{}_{a-}\times D^2{}_{b-})$$

と，4つの部分に分解できる．これは次のように説明される．一般に直積 $X\times Y$ において，Y が $Y=Y_1\cup Y_2$ と和集合になっているなら，$X\times Y$ も $X\times Y=(X\times Y_1)\cup(X\times Y_2)$ という和集合で表わされる（図 9.9 を見よ）．いわば，直積と和集合との間の‘分配法則’である．さらに X も $X=X_1\cup X_2$ と分解されていれば，$X\times Y_1$，$X\times Y_2$ がそれぞれ‘分配法則’によって2つの部分に分けられて，

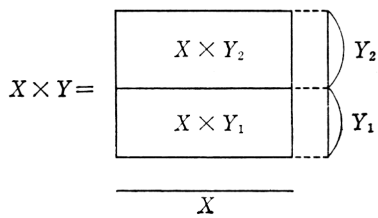


図 9.9

$$X\times Y_1=(X_1\times Y_1)\cup(X_2\times Y_1),\qquad X\times Y_2=(X_1\times Y_2)\cup(X_2\times Y_2)$$

となる．このことから $S^2{}_a\times S^2{}_b$ が上のように4つの部分に分けられることは明らかだろう．

$S^2{}_a\times S^2{}_b$ を分解して得た4つの部分 $D^2{}_{a+}\times D^2{}_{b+}$，$D^2{}_{a+}\times D^2{}_{b-}$，$D^2{}_{a-}\times D^2{}_{b+}$，$D^2{}_{a-}\times D^2{}_{b-}$ はみな2次元 PL 円板の直積だから4次元 PL 円板である（§6.2）．このうち始めの2つを合わせたものを P_b とする．すなわち，$P_b=(D^2{}_{a+}\times D^2{}_{b+})\cup(D^2{}_{a+}\times D^2{}_{b-})$．ここで直積の左側の $D^2{}_{a+}$ は共通だから‘分配法則’を逆に使って，

$$(D^2{}_{a+}\times D^2{}_{b+})\cup(D^2{}_{a+}\times D^2{}_{b-})=D^2{}_{a+}\times(D^2{}_{b+}\cup D^2{}_{b-})=D^2{}_{a+}\times S^2{}_b$$

となる．同様に始めと第3番目の部分を合わせたものを P_a とおく．すなわち $P_a=(D^2{}_{a+}\times D^2{}_{b+})\cup(D^2{}_{a-}\times D^2{}_{b+})$．今度は $D^2{}_{b+}$ が共通だから，

$$P_a=(D^2{}_{a+}\cup D^2{}_{a-})\times D^2{}_{b+}=S^2{}_a\times D^2{}_{b+}$$

となる．

$P_a=S^2{}_a\times D^2{}_{b+}$，$P_b=D^2{}_{a+}\times S^2{}_b$ がわかったが，これらの共通部分は $P_a\cap P_b=D^2{}_{a+}\times D^2{}_{b+}$（$S^2{}_a\times S^2{}_b$ を分解して得た第1の部分）になっている．そして $S^2{}_a\times S^2{}_b$ は和集合 $P_a\cup P_b$ に，4番目の $D^2{}_{a-}\times D^2{}_{b-}$（4次元 PL 円板）をはりつけて得られる：$S^2{}_a\times S^2{}_b=(P_a\cup P_b)\cup(D^2{}_{a-}\times D^2{}_{b-})$.

以上の様子は図 9.10 で象徴的に説明される．この図の2つの‘直交する’アニュラスは，P_a, P_b をそれぞれ表わしている．図の中の円周を2次元 PL 球面 $S^2{}_a, S^2{}_b$ と思えばよい．もともとア

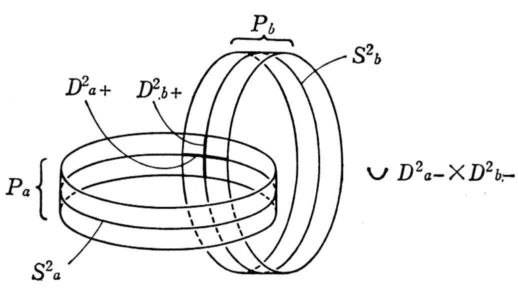


図 9.10

ニュラスは，円周に線分方向の幅をつけたものだったが（cf. §6.2），図 9.10 の中では，この線分は2次元 PL 円板 $D^2{}_{a+}, D^2{}_{b+}$ を表わしているのである．P_a と P_b の共通部分が $D^2{}_{a+} \times D^2{}_{b+}$ であることがよくわかると思う．

P_a と P_b を図 9.10 のような具合に‘直交する’方向にはり合わせたものを P_a と P_b の **plumbing**（プランビング）とよぶ．‘のりづけ’の部分は $D^2{}_{a+} \times D^2{}_{b+}$ という4次元円板である．plumbing の訳語は確定していないが，もとの意味は‘鉛管工事’である．パイプのようなものをつなげるといったイメージからそう名づけられたものと思われる．この‘鉛管工事’については後でもう少し説明する（§10.3）．

図 9.10 を象徴的な説明図と思わず，実際に2つの2次元アニュラスが直交する方向に交わっているものと考えれば，この図はすでに §6.4 図 6.24 (a) に出てきた．そこでは，2次元トーラス $S^1 \times S^1$ から $\mathrm{Int}(D^2)$ を除いたものが，2つの直交するアニュラスに PL 同形なのであった．いまの場合は $S^2{}_a \times S^2{}_b$ から4次元 PL 円板 $D^4 = D^2{}_{a-} \times D^2{}_{b-}$ の内部を除いたものが $P_a \cup P_b$ になっている．このように，次元こそ違え，$S^2 \times S^2$ と $S^1 \times S^1$ はその分解の様子がよく似ている．

いずれにせよ，$S^2{}_a \times S^2{}_b = (P_a \cup P_b) \cup D^4$ がわかった（$D^4 = D^2{}_{a-} \times D^2{}_{b-}$）．$P_a \cup P_b$ は境界をもつ4次元多様体であり，その境界 $\partial(P_a \cup P_b)$ は S^3 である．この境界に沿って D^4（D^4 の境界 ∂D^4 も S^3!）をはりつけたものが $S^2{}_a \times S^2{}_b$ なのである．

以上の観察にもとづいて $H_2(S^2{}_a \times S^2{}_b)$ を計算しよう．

公式2の証明の中で，マイヤー－ヴィエトリスの定理を使って $H_2(M) \cong H_2(M - \mathrm{Int}\,\Delta^4)$ を示した．全く同じ理由で $H_2(S^2{}_a \times S^2{}_b) \cong H_2(P_a \cup P_b)$ が成り立つ．

$H_2(P_a \cup P_b)$ の計算にもマイヤー－ヴィエトリスの定理が使える．それには $H_1(P_a \cap P_b) \cong \{0\}$，$H_2(P_a \cap P_b) \cong \{0\}$ を示せばよいが，$P_a \cap P_b$ は上で見たように4次元円板であるから，1点にホモトピー同値（§8.2 例1）であり，ホモロジー群のホモトピー不変性によって $H_1(P_a \cap P_b) \cong \{0\}$，$H_2(P_a \cap P_b) \cong \{0\}$ がわかる．マイヤー－ヴィエトリスの定理から $H_2(P_a \cup P_b) \cong H_2(P_a) \oplus H_2(P_b)$ が得られた．

$P_a \cong P_b \cong S^2 \times D^2$ であったことを思い出そう．D^2 の中心を0とすると，0は D^2 の変形レトラクトであった（§8.2，例1）．このことから $S^2 \times \{0\}$ は $S^2 \times D^2$ の変形レトラクトであることがわかる．D^2 をしだいに小さくしていき，$S^2 \times D^2$ の‘太さ’をしだいに細くすれば，$S^2 \times D^2$ は‘中心線の’S^2 に縮んでしまうのである．再び H_2 のホモトピー不変性を使って $H_2(P_a) \cong H_2(S^2{}_a)$，$H_2(P_b) \cong H_2(S^2{}_b)$ がわかる．§8.5 の最後の例で $H_2(S^2) \cong \boldsymbol{Z}$ を示しておいたので，$H_2(P_a) \cong \boldsymbol{Z}$，$H_2(P_b) \cong \boldsymbol{Z}$ がわかる．結局，

$$H_2(S^2{}_a \times S^2{}_b) \cong H_2(P_a \cup P_b) \cong H_2(P_a) \oplus H_2(P_b) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$$

となった．この2つの $\boldsymbol{Z}$ の生成元を α, β とすれば，α, β はそれぞれ適当に向きづけられた $S^2{}_a, S^2{}_b$ で表わされる．（§8.5 の終り近くで説明したように，向きづけられた閉曲面は2次元サイクルと考えられる．）

$S^2{}_a \times S^2{}_b$ の交点形式 $h: H_2(S^2{}_a \times S^2{}_b) \times H_2(S^2{}_a \times S^2{}_b) \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を求めよう．図 9.10 で

見るように，$S^2{}_a \times S^2{}_b$ の中で $S^2{}_a$ と $S^2{}_b$ はただ1点で‘直交している’．よってその交わり数は ± 1 であるが，ここで $S^2{}_a \times S^2{}_b$ の向きを適当に定めれば $+1$ としてよい．よって $\alpha\cdot\beta = 1$ であることがわかる．対称性から $\beta\cdot\alpha = 1$ である．

同じ図 9.10 によって $\alpha\cdot\alpha = 0$, $\beta\cdot\beta = 0$ も示せる．実際，$P_a = S^2{}_a \times D^2{}_{b+}$ であった．ここで α は‘中心の’ $S^2{}_a \times \{0\}$ (0は $D^2{}_{b+}$ の中心) で表わされると考えられるが，この $S^2{}_a \times \{0\}$ をほんの少しずらして $S^2{}_a \times \{\varepsilon\}$ という球面を考える (ε は $D^2{}_{b+}$ の中心0に非常に近い点)．すると $S^2{}_a \times \{0\}$ と $S^2{}_a \times \{\varepsilon\}$ はいわば平行であって共通点はない．これは $\alpha\cdot\alpha = 0$ を意味する．同様に $\beta\cdot\beta = 0$ がわかる．以上で $H_2(S^2{}_a \times S^2{}_b)$ の基底 α, β の間の交わり数がわかったから $\mathrm{sign}(S^2 \times S^2)$ が計算できる．

前の § の方法に従って基底のとりかえを行ない，交点形式を対角化する．(交点形式を h とし，h を Q に拡張したものを $\tilde{h}$ と書く．cf. §9.2)

まず $\alpha' = \alpha + \beta$, $\beta' = \beta$ ととりかえる．すると

$$\tilde{h}(\alpha', \alpha') = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha\cdot\alpha + \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\alpha + \beta\cdot\beta = 0+1+1+0 = 2$$
$$\tilde{h}(\alpha', \beta') = (\alpha+\beta)\cdot\beta = \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\beta = 1+0 = 1$$
$$\tilde{h}(\beta', \alpha') = \tilde{h}(\alpha', \beta') = 1$$
$$\tilde{h}(\beta', \beta') = \beta\cdot\beta = 0$$

さらに，$\alpha'' = \alpha'$, $\beta'' = \beta' - \dfrac{1}{2}\alpha'$ とおくと，

$$\tilde{h}(\alpha'', \alpha'') = \tilde{h}(\alpha', \alpha') = 2$$
$$\tilde{h}(\alpha'', \beta'') = \tilde{h}\left(\alpha', \beta' - \frac{1}{2}\alpha'\right) = \tilde{h}(\alpha', \beta') - \frac{1}{2}\tilde{h}(\alpha', \alpha') = 1 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 0$$
$$h(\beta'', \alpha'') = \tilde{h}(\alpha'', \beta'') = 0$$
$$\tilde{h}(\beta'', \beta'') = \tilde{h}\left(\beta' - \frac{1}{2}\alpha',\ \beta' - \frac{1}{2}\alpha'\right) = \tilde{h}(\beta', \beta') - \frac{1}{2}\tilde{h}(\alpha', \beta') - \frac{1}{2}\tilde{h}(\beta', \alpha') + \frac{1}{4}\tilde{h}(\alpha', \alpha') = -\frac{1}{2}$$

これで対角化できた．$\tilde{h}(\alpha'', \alpha'')$, $\tilde{h}(\beta'', \beta'')$ の中にプラスのもの (=2) が1個，マイナスのもの $\left(= -\dfrac{1}{2}\right)$ が1個あるから，$\underline{\mathrm{sign}(S^2 \times S^2) = 1 - 1 = 0}$ である．

なお，$S^2{}_a \times S^2{}_b = (P_a \cup P_b) \cup D^4$ という分解に基づいて $\pi_1(S^2 \times S^2) \cong \{e\}$ (自明群) を示すことができる．ファン・カンペンの定理 I (§8.3) の応用である．この証明は読者にまかせる．証明がおっくうな人も，$S^2 \times S^2$ が単連結であると知っておいていただきたい．

2) CP_2 (複素射影平面)

複素射影平面 CP_2 は非常に大切な4次元多様体である．これについて符号数を計算しよう．4次元の多様体であるのに，複素射影平面とよぶのは少しおかしく感じられるかも知れないが，複素数はもともと $a + b\sqrt{-1}$ という形式的な和であったことを思い出していただきたい．実数の立場から言えば複素数全体 C は2次元なのである．ところが C のどの点も‘ひとつの複素数 $a + b\sqrt{-1}$’に対応しているから，複素数の立場では C は1次元なのである．つまり複

素数の立場で n 次元のものは実数の立場では $2n$ 次元である．複素射影平面というのは，複素数の立場での射影平面であって，実数の立場では4次元になるというわけである．($\boldsymbol{C}$ を‘複素平面’または‘ガウス平面’で表示するやり方を御存知かも知れないが，この場合に言う‘平面’とは実数の立場での平面である．)

さて §3.4 で（実数の立場での）射影平面 P^2 を構成した．メビウスの帯の境界（$\cong S^1$）に沿って2次元円板 D^2 をはりつけたのだった．メビウスの帯はアニュラス（＝直積 $S^1 \times [0,1]$）を‘ひねったもの’と考えることができるが，同じように複素射影平面の場合も，S^2 と D^2 の‘1回ひねった直積’に4次元円板 D^4 をはり合わせて構成することができるのである．

まず，‘ひねった直積’について説明しよう．これは S^2 上の D^2- バンドル（D^2-bundle over S^2）とよばれるものである．この本では簡単に**バンドル**という．

図 9.11 は，2つの長方形の‘両サイド’を写像 f でくっつけてメビウスの帯やアニュラスが得られる様子を表わしている．長方形は2つの線分の直積である．線分を1次元円板と考えて D^1 と書く．長方形は $D^1 \times D^1$ である．2つの長方形を区別して $(D^1{}_+) \times D^1$, $(D^1{}_-) \times D^1$ と書く（図 9.11)．写像 f は $(\partial D^1{}_+) \times D^1$ から $(\partial D^1{}_-) \times D^1$ への PL 同形写像である．∂D^1 は2点であるから $(\partial D^1) \times D^1$ は2本の線分である．この写像 $f: (\partial D^1{}_+) \times D^1 \longrightarrow (\partial D^1{}_-) \times D^1$ のとり方によって，メビウスの帯ができたりアニュラスができたりするのである．また $D^1{}_+ \times \{0\}$ と $D^1{}_- \times \{0\}$（0は D^1 の中心）とがはり合わされて，メビウスの帯やアニュラスの中心線になる．

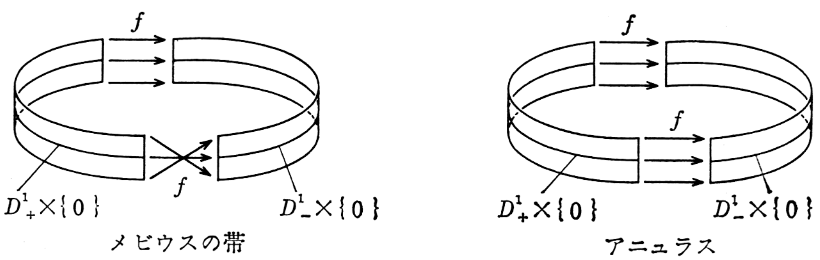


図 9.11

バンドルの構成もこれと全く同じである．今度は2次元円板の直積を2つとり，$(D^2{}_+) \times D^2$, $(D^2{}_-) \times D^2$ とする．そして，以下説明する PL 同形写像 $f: (\partial D^2{}_+) \times D^2 \longrightarrow (\partial D^2{}_-) \times D^2$ によって，2つの直積をはり合わせる．こうして得られるのがバンドルである（図 9.12)．図 9.12 では，下の厚みづけた円板を上の方でおわんの形にまげてある．図では1次元の厚みがついているが，本当は2次元円板 D^2 による厚みづけである．$(\partial D^2{}_+) \times D^2$, $(\partial D^2{}_-) \times D^2$

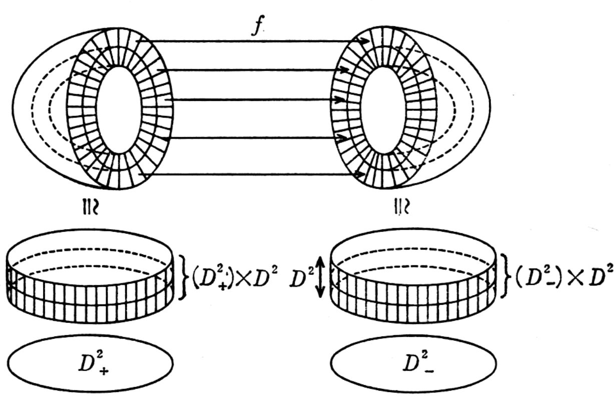


図 9.12

は図の中ではセンの入ったアニュラスで表わされている．この部分は（円周）× D^2 であるから，本当は中みのつまったトーラス（solid torus）である．

$f:(\partial D^2_+)\times D^2 \longrightarrow (\partial D^2_-)\times D^2$ は中身のつまったトーラス（ドーナツ！）から中身のつまったトーラスへの PL 同形写像であるが，その写像は次のようなものであるとする．（図 9.13）．'ドーナツ' は円周（S^1）のまわりに円板をぐるっとまわしたものである．f は，S^1 の

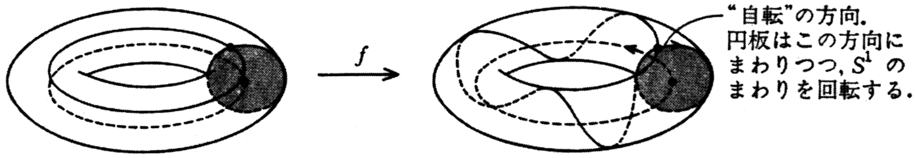


図 9.13　この図の f は '3 回ねじり'

まわりのひとつひとつの円板をひとつひとつの円板に写すが，ただし，円板が S^1 に沿ってまわっていく（公転する）間に，少しずつ回転（自転）させながら写すのである．図 9.13 は，円板が 1 回公転する間に f は円板を 3 回自転させて写している様子を表わしている．このため，左側の図の表面上の円周は，右側の図の，中心線（破線で表わされている）のまわりを 3 回まわるラセンに写されている．一般に，1 公転の間に n 回自転するように写す $f:(\partial D^2_+)\times D^2 \longrightarrow (\partial D^2_-)\times D^2$ を **n 回ねじりの PL 同形**とよぶことにする．$n=0$ の場合は '自転' のない場合，$n<0$ の場合は自転の方向を反対にしたものとする．

この $f:(\partial D^2_+)\times D^2 \longrightarrow (\partial D^2_-)\times D^2$ によって $D^2_+\times D^2$ と $D^2_-\times D^2$ をはり合わせたものを B_n と書こう．n は，f が n 回ねじりの PL 同形であることを表わしている．

$n=0$ の場合はねじれのない場合であるから，

$$B_0=(D^2_+\times D^2)\cup(D^2_-\times D^2)=(D^2_+\cup D^2_-)\times D^2=S^2\times D^2$$

となり，S^2 と D^2 の直積になる．$n\neq 0$ の場合は直積ではなく S^2 と D^2 の 'ねじれた直積' である．いずれの場合も B_n は境界をもつ 4 次元多様体になっている．

円板の '自転' はその中心のまわりの回転であるから f はドーナツの中心線を中心線に写す．記号で書けば，f は $(\partial D^2_+)\times\{0\}$ を $(\partial D^2_-)\times\{0\}$ に写すのである．そこで $D^2_+\times\{0\}$ と $D^2_-\times\{0\}$ をこの f ではり合わせることができて，$S^2=(D^2_+\times\{0\})\cup(D^2_-\times\{0\})$ という 2 次元球面が B_n の中に入っていることがわかる．この S^2 はメビウスの帯の場合の '中心線' に対応しているから，同じく B_n の**中心線**とよぶことにしよう．この本の中での仮の名称である．中心線とはいってもこの場合は 2 次元球面であることに注意してほしい．メビウスの帯の中心線（円周）は全体の変形レトラクトであった．同様に B_n の中心線 S^2 は B_n の変形レトラクトになっている．2 次元円板の半径をしだいに小さくしていけば，B_n は S^2 に縮んでしまうのである．これから $H_2(B_n)\cong H_2(S^2)\cong \boldsymbol{Z}$ がわかる．

この $\boldsymbol{Z}$ の生成元 α は S^2 という 2 次元サイクルで表わされている．α と α の交わり数 $\alpha\cdot\alpha$ を求めよう．そのために，S^2 を少しずらして，自分自身と有限個の点で交わらせる．まず $D^2_+\times D^2$ の中で $D^2_+\times\{0\}$ を $D^2_+\times\{p\}$ にずらす．p は中心 0 でなければ D^2 のどの点でもよい．ずらした円板の境界の円周 $(\partial D^2_+)\times\{p\}$ は，f によって $(\partial D^2_-)\times D^2$ の中

の，中心線 $(\partial D^2_-) \times \{0\}$ のまわりを n 回まわるラセン $f((\partial D^2_+) \times \{p\})$ に写る（図 9.14）．このラセンを，$(\partial D^2_-) \times D^2$ の中で，図 9.14 の灰色部分がその軌跡になるように動かして $(\partial D^2_-) \times \{q\}$ の位置に持ってくることができる．この軌跡部分を T とする．B_n の中で，$S' = (D^2_+ \times \{p\}) \cup T \cup (D^2_- \times \{q\})$ とおく．S' は2つの円板 $D^2_+ \times \{p\}$ と $T \cup (D^2_- \times \{q\})$ を，その境界に沿って $f|((\partial D^2_+) \times \{p\})$ ではり合わせたもので，2次元球面である．S' は B_n の‘中心線’ S^2 をずらして，S^2 自身と有限個の点で交わるようにしたものと考えられる．S' と S^2 の交点は，T と $(\partial D^2_-) \times D^2$ の中心線の交点として現われる．図 9.14 には，2回ねじりの f についての交点の様子が描かれているが，一般に n 回ねじりの f についての交点の数は n である．そしてそれらはすべて同一の交わりの符号をもっている．B_n の向きを適当に選んでそれらの符号をすべて $+$ にすることができる．こうして S^2 と S' との交わり数は n になった．これで，$H_2(B_n) \cong \boldsymbol{Z}$ の生成元 α の交わり数が $\alpha \cdot \alpha = n$ であることがわかった．

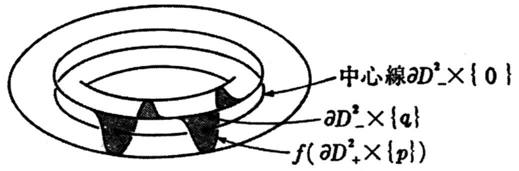


図 9.14　2回ねじりの f

複素射影平面の構成に必要なのは B_1（$n=1$ の場合の B_n）である．

【補助定理】 $\partial B_1 \cong S^3$ である．

これは，メビウスの帯の境界が S^1 であることと似た現象である．まず，S^3 は次のようにして2つのドーナツの和に分解されることに注意しよう．$D^4 \cong D^2 \times D^2$ と考え，§6.2 の定理 6.5 に従ってその境界を考えるのである．すると $S^3 = \partial D^4 \cong ((\partial D^2) \times D^2) \cup (D^2 \times \partial D^2)$ となって，S^3 が2つのドーナツ $(\partial D^2) \times D^2$ と $D^2 \times \partial D^2$ の和に分解されることがわかる．

B_1 は $D^2_+ \times D^2$ と $D^2_- \times D^2$ を1回ねじりの $f : (\partial D^2_+) \times D^2 \longrightarrow (\partial D^2_-) \times D^2$ ではり合わせたものである．その境界 ∂B_1 は $D^2_+ \times \partial D^2$ と $D^2_- \times \partial D^2$ を $f|(\partial D^2_+) \times \partial D^2$ によってはり合わせたものになっている．$D^2_+ \times \partial D^2$，$D^2_- \times \partial D^2$ という2つのドーナツを $f|(\partial D^2_+) \times \partial D^2$ ではり合わせる仕方といま述べた S^3 の分解の様子を比較して，∂B_1 が S^3 に PL 同形になることが，示されるのである．厳密な証明はここでは省略することにする．

同様の議論で $\partial B_{-1} \cong S^3$ も証明できる．B_n のうち，境界が S^3 になるのは $n = 1, -1$ の場合だけであることもわかっている．

さて，問題の複素射影平面 $\boldsymbol{CP}_2$ は，B_1 の境界（$\cong S^3$）に沿って D^4 をはりつけたものである：$\boldsymbol{CP}_2 = B_1 \cup D^4$．$\boldsymbol{CP}_2$ は境界のない単連結な4次元多様体になる．

$H_2(\boldsymbol{CP}_2) \cong H_2(\boldsymbol{CP}_2 - \mathrm{Int}\, D^4) \cong H_2(B_1) \cong \boldsymbol{Z}$ であり，その生成元 α の交わり数は $\alpha \cdot \alpha = +1$ で与えられる．生成元はただひとつしかないから，すでに対角化されており，符号数は1になる．よって $\mathrm{sign}(\boldsymbol{CP}_2) = 1$ がわかった．B_{-1} の境界も S^3 だから，やはり D^4 をはり合わせて単連結な4次元閉多様体が得られる．これを $\overline{\boldsymbol{CP}}_2$ と表わす．$\mathrm{sign}(\overline{\boldsymbol{CP}}_2) = -1$ である．$\overline{\boldsymbol{CP}}_2$ は $\boldsymbol{CP}_2$ の‘向き’を逆にしたものと考えることができる．$\boldsymbol{CP}_2$ という記号についている数字の2は，複素数の立場での次元を表わしていることを注意しておく．

第10章

4次元の罠（わな）

§10.1　ロホリンの定理

これまでの言葉使いにならって，境界をもたないコンパクト多様体を**閉多様体**とよぶことにする．

1次元の連結な閉多様体は S^1 しかない．2次元の連結閉多様体（すなわち閉曲面）は§6.4ですべて分類された．このように，1次元2次元の多様体が分類されてみると，さらに3次元，4次元の多様体もすべて分類してみたくなるのは自然であろう．

ところが3次元以上の多様体をすべて分類し尽くすことは今日に至ってもできていない．それどころか，4次元以上の閉多様体をすべて分類することは，実は不可能なのである．

いま，$G = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \mid h_1 = e,\ h_2 = e,\ \cdots,\ h_r = e \rangle$ を，'表示' によって与えられた任意の群とする．すると，この群を基本群にもつような4次元連結閉多様体が存在することが証明できる．そこで，もしすべての4次元多様体が分類できるなら，とくにその基本群を見ることによって，どんな '群の表示' が互いに同型な群を与えるか，どんな表示が同型な群を与えないか，がすっかりわかってしまうことになるであろう．ところが，§7.2の終りにちょっと注意しておいたように，すべての有限表示群を分類することは不可能なことが知られている（ノビコフ）．したがって，すべての4次元多様体の分類も不可能なのである．

2次元までの場合，閉多様体の基本群になり得る群は限られていた（§8.3）．3次元の場合もすべての群が閉多様体の基本群になり得るわけではない．ところが，4次元以上では，すべての有限表示群が多様体の基本群になり得るのであるから，そのおびただしい多種多様さがわかると思う．

では基本群に制限をつけてみたらどうだろう．たとえば基本群が自明の場合，すなわち単連結の場合にはどうか．単連結な4次元閉多様体ならすべて分類することができるのだろうか．実は，これも現在未解決である．

しかし，いくつかの事実は知られている．

【定義】 M, N を向きづけられた4次元多様体とする．PL 同形写像 $f: M \longrightarrow N$ があるとし，f が**向きを保つ**とは，M に '向き' を指定するため M の各点に与えられている4

本のベクトル (e_1, e_2, e_3, e_4) を f で写して $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ とすると，これが N に指定されている‘向き’と一致した‘向き’を与えることである．ひとことでいえば，f は M の‘向き’を N の‘向き’に写すのである．

向きづけられた多様体を分類するときには，単なる PL 同形写像による分類ではなく，向きを保つ PL 同形写像による分類を考えるのが普通である．

向きを保つ PL 同形写像 $f: M \longrightarrow N$ がある場合，$H_2(M)$ と $H_2(N)$ とは $f_*: H_2(M) \longrightarrow H_2(N)$ によって同型になる（f_* は同型写像になる）．また任意の $\xi, \eta \in H_2(M)$ について，$f_*(\xi)$ と $f_*(\eta)$ の交わり数は ξ と η の交わり数に等しい：$f_*(\xi) \cdot f_*(\eta) = \xi \cdot \eta$．これは，$\xi, \eta$ に属する2次元サイクル z_1, z_2 をとり，それらを PL 同形 f で写して $f(z_1), f(z_2)$ を考えると，$f(z_1), f(z_2)$ の N の中での交わりの様子が，z_1, z_2 の M の中での交わりの様子と全く同じであることから証明される．

【定義】　2つの対称双1次形式 $h: H \times H \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ と $h': H' \times H' \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ が同値であるとは，加群の間の同型 $f_*: H \longrightarrow H'$ が存在して，任意の $x, y \in H$ について，$h'(f_*(x), f_*(y)) = h(x, y)$ が成り立つことである．h, h' が非退化であるとき，両者が同値であれば，その符号数も一致する：$\mathrm{sign}(h) = \mathrm{sign}(h')$．

向きを保つ PL 同形写像 $f: M \longrightarrow N$ があれば，M と N の交点形式は互いに同値になる．したがって，その符号数も等しい：$\mathrm{sign}(M) = \mathrm{sign}(N)$．

たとえば $\mathrm{sign}(CP_2) = 1$，$\mathrm{sign}(\overline{CP_2}) = -1$ であるから，CP_2 と $\overline{CP_2}$ とは向きを保って PL 同形にはならない．（CP_2 と $\overline{CP_2}$ とは‘向きづけ’だけが異なるので，‘向き’を考慮に入れなければもちろん互いに PL 同形になる．）

以下，向きづけられた4次元多様体については，$M \cong N$ という記号を，‘向きを保って PL 同形’の意味に使うことにする．

前に閉曲面の分類の所で，$T^2 \# P^2 \cong P^2 \# P^2 \# P^2$ であることを示しておいた（§6.4）．これに似た公式が4次元にもある．

$$S^2 \times S^2 \# CP_2 \cong \overline{CP_2} \# CP_2 \# CP_2$$

という公式である．さらに一般に，次の定理が知られている．

【ウォールの定理】　M を任意の連結，かつ単連結な（向きづけられた）4次元閉多様体とする．M に十分たくさんの CP_2 と $\overline{CP_2}$ とを連結和すれば，CP_2 と $\overline{CP_2}$ のいくつかの連結和に‘向きを保って PL 同形’になってしまう．

$CP_2 \# CP_2 \# \cdots \# CP_2$（$k$ 個の連結和）を簡単に kCP_2 と表わすことにすれば，ウォールの定理は $M \# kCP_2 \# l\overline{CP_2} \cong mCP_2 \# n\overline{CP_2}$ という k, l, m, n があると主張しているのである（$k, l, m, n \geqq 0$）．符号数についての和公式（§9.3，公式2）から

$$\mathrm{sign}(M) + k - l = m - n$$

が得られる．これが k, l, m, n の関係である．

1964 年に出版されたウォール（C. T. C. Wall）の原論文ではやや違った形に述べられているが，ここでは，もともとの定理からのひとつの帰結を，ウォールの定理として述べたのであ

る．

このような定理があるからといって，4次元の単連結な閉多様体が分類できたわけではない．$S^2\times S^2\# CP_2\cong\overline{CP_2}\# CP_2\# CP_2$ という例からもわかることであるが，$S^2\times S^2$ と $\overline{CP_2}\# CP_2$ の交点形式は（すぐ後で説明するように）同値でないので，これらは向きを保って PL 同形ではない．ところが CP_2 を連結和することによって，その区別が消えてしまい，向きを保って PL 同形になってしまう．CP_2 や $\overline{CP_2}$ を連結和することは，4次元多様体の間の，ある繊細な特徴を消してしまう働きがあるのである．十分たくさんの CP_2 と $\overline{CP_2}$ を連結和すると，繊細な特徴が全部消えてしまい，単連結4次元多様体 M は何のヘンテツもない $mCP_2\# n\overline{CP_2}$ という4次元多様体に‘変身’してしまう．これがウォールの定理のキー・ポイントである．

この定理はこれとして興味深く，また有用であるが，‘すべての単連結な4次元閉多様体を分類したい’という立場からは不満である．我々が知りたいのは，CP_2 や $\overline{CP_2}$ を連結和する以前の‘繊細な区別’なのである．この‘繊細な特徴’が完全に捉えきれていないところに，現在の4次元トポロジーの困難さがある．

$S^2\times S^2$ と $CP_2\#\overline{CP_2}$ とは交点形式が同値でないと言った．これが，この場合の‘繊細な区別’になっているが，それは次のように説明される．

$H_2(S^2\times S^2)\cong \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ であった．生成元を α,β とすると，交わり数（交点形式）は $\alpha\cdot\alpha=0$，$\beta\cdot\beta=0$，$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha=1$ で与えられた．これから，$H_2(S^2\times S^2)$ の任意の要素 ξ について，ξ とそれ自身の交わり数 $\xi\cdot\xi$ は偶数であることがわかる．実際 ξ は $\xi=m\alpha+n\beta$ と表わすことができるから

$$\xi\cdot\xi=(m\alpha+n\beta)\cdot(m\alpha+n\beta)=m^2(\alpha\cdot\alpha)+mn(\alpha\cdot\beta)+nm(\beta\cdot\alpha)+n^2(\beta\cdot\beta)=2mn$$

となって偶数になる．

【定義】 一般に，対称双1次形式 $h:H\times H\longrightarrow \boldsymbol{Z}$ があって任意の $x\in H$ について $h(x,x)$ が偶数のとき，h を **II 型**の双1次形式という．または簡単に**偶数形式**ともいう．

h が偶数形式でないとき，すなわち $h(x,x)$ が奇数になるような $x\in H$ が少くともひとつあるとき，h を **I 型**の対称双1次形式，または**奇数形式**という．

上で見たように，$S^2\times S^2$ の交点形式は偶数形式である．ところが $CP_2\#\overline{CP_2}$ の交点形式は奇数形式である．実際，$H_2(CP_2\#\overline{CP_2})\cong H_2(CP_2)\# H_2(\overline{CP_2})\cong\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ であって，生成元を α',β' とすれば $\alpha'\cdot\alpha'=1$，$\alpha'\cdot\beta'=0$，$\beta'\cdot\alpha'=0$，$\beta'\cdot\beta'=-1$ となるからである．

$S^2\times S^2$ に CP_2 を連結和すると，もはや交点形式は偶数形式でなくなってしまい．$S^2\times S^2$ と $CP_2\#\overline{CP_2}$ の区別が消失する．

4次元閉多様体が偶数交点形式をもつか否かは，CP_2 を連結和することによって消えてしまう‘繊細な特徴’のひとつになっている．

さて，ウォールの定理が発表される10年以上前の1952年に，ロホリン（英語では V. A. Rochlin または V. A. Rohlin）というロシアの数学者によって，ひとつの奇妙な現象が指摘されていた．

【ロホリンの定理】 向きづけられた4次元単連結 PL 閉多様体 M が偶数の交点形式（II型の交点形式）をもてば，その符号数は16で割り切れる．(p.174の注参照)

この定理の奇妙さについて述べる前に，次の定義をしておこう．

【定義】 非退化な対称双1次形式 $h:H\times H\longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を $\tilde{h}:(\boldsymbol{Q}H)\times(\boldsymbol{Q}H)\longrightarrow \boldsymbol{Q}$ に拡張して，§9.2の補助定理を証明した方法で対角化したとき，積 $\tilde{h}(b_1,b_1)\tilde{h}(b_2,b_2)\cdots\tilde{h}(b_n,b_n)$ が $+1$ または -1 になれば，もとの h を**非特異**という．（'行列式' を御存知なら次のように定義しても同じことである．H の生成元 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ をとり，第 i 行第 j 列の成分が $h(a_i,a_j)$ であるような n 行 n 列の行列 $[h(a_i,a_j)]$ を考える．その行列式が $\det[h(a_i,a_j)]=\pm1$ のとき，h を非特異という．）

§9.4 で $\mathrm{sign}(S^2\times S^2)$ を計算したとき，$S^2\times S^2$ の交点形式を対角化した．そこで得た $\boldsymbol{Q}H_2(S^2\times S^2)$ の基底 α'',β'' については $\tilde{h}(\alpha'',\alpha'')=2$, $\tilde{h}(\alpha'',\beta'')=\tilde{h}(\beta'',\alpha'')=0$, $\tilde{h}(\beta'',\beta'')=-1/2$ であった．したがって積 $\tilde{h}(\alpha'',\alpha'')\tilde{h}(\beta'',\beta'')=2\cdot(-1/2)=-1$ となって，上の定義から $S^2\times S^2$ の交点形式は非特異である．一般にポアンカレの双対定理とよばれる定理から，次の事実が証明される．

【定理 10.1】 M を任意の向きづけられた4次元閉多様体とすると，M の交点形式は非特異である．

したがって，M がもしII型の交点形式をもてば，M は<u>II型</u>かつ<u>非特異な</u>交点形式をもつわけである．

II型かつ非特異な対称双1次形式 $h:H\times H\longrightarrow \boldsymbol{Z}$ に関して，次の定理は代数的議論によってよく知られている．

【定理 10.2】 II型かつ非特異な対称双1次形式 $h:H\times H\longrightarrow \boldsymbol{Z}$ の符号数は8で割り切れる．

定理10.1と10.2を合わせれば，向きづけられた4次元閉多様体がII型の交点形式をもてば，その符号数は8で割り切れなければならないということがすぐわかる．これは単に，ポアンカレ双対定理とII型非特異な対称双1次形式に関する代数の知識とを組み合わせただけの '浅い' 結果に過ぎないが，ロホリンの定理は4次元多様体のある '深い' 特殊事情によって，II型の交点形式をもつ4次元閉多様体の符号数は8で割れるだけではなく，さらに2倍の16で割り切れなければならないと主張しているのである．

ロホリンの定理の特殊性は，さらに高次元の多様体を調べてみるとよくわかる．一般に4の倍数 $4n$ 次元の向きづけられた閉多様体についても，$2n$ 次元サイクルの交わり数を使って交点形式が定義できる．ポアンカレの双対定理はこの場合にも成り立っていて，その交点形式は非特異である．したがって，もしその交点形式がII型なら定理10.2によって符号数は8で割り切れなければならない．しかし，4次元以外の場合（つまり8次元以上の $4n$ 次元多様体の場合には），これがさらに2倍の16で割れねばならぬという必然性は何もない．実際に，II型の交点形式をもつ $4n$ 次元の PL 閉多様体で，符号数がちょうど8のものが存在するのである．(§10.3, ノート(2)参照)

ロホリンの発見した4次元特有の現象は，意外なことに，高次元のトポロジーにもその効果を及ぼすことが知られている．これについては §10.4 で説明しよう．

§10.2 球面の埋め込み

トポロジーの研究において，球面を多様体に埋め込む必要がしばしば生ずる．とくに，M を $2n$ 次元の単連結閉多様体とし，n 次元球面からの連続写像 $f: S^n \longrightarrow M$ が与えられた場合に，f が‘埋め込み’写像にホモトープになるかどうか判定することは大切な問題である．

6次元以上の場合，すなわち $\dim M = 2n \geqq 6$ の場合には，このような埋め込みは常に可能である（ホイットニー）．この便利な事情が，1950〜60 年代にトポロジーが大発展をとげた（技術的な側面での）理由であったといっても過言ではない．

4次元の場合には，上の問題は2次元球面 S^2 を単連結4次元閉多様体 M に‘埋め込む’問題になる．ところが，4次元では，連続写像 $f: S^2 \longrightarrow M$ のとり方によっては，埋め込み写像にホモトープになる場合もなり得ない場合もある．高次元のすっきりした事情に比較して，4次元多様体への S^2 の埋め込み問題は極めて複雑な様相を呈するのである．連続写像 $f: S^2 \longrightarrow M$ が埋め込み写像にホモトープになるための必要十分条件を求めることは現在未解決の難問である．

ある連続写像 $f: S^2 \longrightarrow M$ が埋め込み写像にホモトープにならない状況では，なぜ埋め込み写像にならないかという理由（‘障害’）が必ずあるわけであるが，そのような障害には現在いろいろなものが知られている．その中で，歴史上最初に発見された障害は，前の§で述べたロホリンの定理にかかわるものであった．こんな所にもロホリンの定理が顔を出すのである．報告者はケルベア（M. Kervaire）とミルナーであった．1961 年のことである．

この§で，彼らの発見した現象を特殊な4次元多様体 CP_2 について紹介しよう．まず‘埋め込み’とは何かを明らかにしておく．

【定義】 M の部分多面体 L が2次元球面 S^2 に PL 同形のとき，PL 同形写像 $S^2 \longrightarrow L$ を S^2 から M への写像 $f: S^2 \longrightarrow M$ と考えて，S^2 の M への**埋め込み写像**とよぶ．$L = f(S^2)$ を埋め込まれた**像**という．

埋め込み写像 $f: S^2 \longrightarrow M$ が，S^2 を中心線とするあるバンドル B_n の埋め込み $\tilde{f}: B_n \longrightarrow M$ にまで拡張できるとき，$f: S^2 \longrightarrow M$ を**局所平坦**な埋め込みという．また B_n の像 $\tilde{f}(B_n)$ を $f(S^2)$ の**管状近傍**とよぶ（図 10.1）．

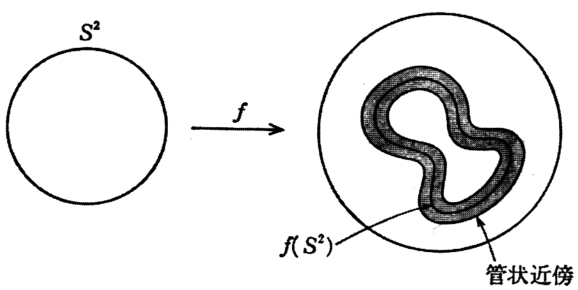


図 10.1 局所平坦な埋め込み

さて CP_2 を複素射影平面とする．$H_2(CP_2) \cong \boldsymbol{Z}$ であった．生成元を α とすると $H_2(CP_2)$ の

任意の要素 ξ は $\xi = m\alpha$ ($m \in \boldsymbol{Z}$) と書き表わされる．

次のことが知られている．どんな $\xi \in H_2(\boldsymbol{CP}_2)$ についても，連続写像 $f: S^2 \longrightarrow \boldsymbol{CP}_2$ をうまく選べば，f により引き起こされた準同型写像 $f_*: H_2(S^2) \longrightarrow H_2(\boldsymbol{CP}_2)$ によって $H_2(S^2)$ ($\cong \boldsymbol{Z}$) の生成元 σ が ξ に写るようにすることができる（すなわち $f_*(\sigma) = \xi$）．

$\xi = 3\alpha \in H_2(\boldsymbol{CP}_2)$ について，そのような連続写像 $f: S^2 \longrightarrow \boldsymbol{CP}_2$ を選んでおこう．

【定理 10.3】 $f: S^2 \longrightarrow \boldsymbol{CP}_2$ は局所平坦な埋め込み写像にホモトープにならない．

もし，f がある局所平坦な埋め込み写像 $g: S^2 \longrightarrow \boldsymbol{CP}_2$ にホモトープなら，像 $g(S^2)$ は $\boldsymbol{CP}_2$ の中の局所平坦な2次元球面であり，（それを2次元サイクルと考えたとき）3α というホモロジー類を表わしているはずである．

定理 10.3 を証明するためには，3α というホモロジー類を表わすような局所平坦な2次元球面は $\boldsymbol{CP}_2$ の中に存在しないことを示せばよい．

いま，そのような S_0 が存在したとしよう．この仮定から矛盾を出すのである．$\boldsymbol{CP}_2$ に8個の $\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ を連結和して $\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ を作る．$\overline{\boldsymbol{CP}_2} = B_{-1} \cup D^4$ であった（§9.4 の構成を思い出すこと）．よって $\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ の中には，B_{-1} の‘中心線’として局所平坦な2次元球面が含まれている．$\boldsymbol{CP}_2$ に連結和した8個の $\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ の中にそれぞれひとつずつそのような局所平坦な球面をとって $S_1, S_2, \cdots, S_8$ とする．連結和 $\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ の中で9個の球面 $S_0, S_1, S_2, \cdots, S_8$ の連結和 $S_0 \# S_1 \# S_2 \# \cdots \# S_8$ を作る（図 10.2）．球面の連結和は球面であるから，$S_0 \# S_1 \# S_2 \# \cdots \# S_8$

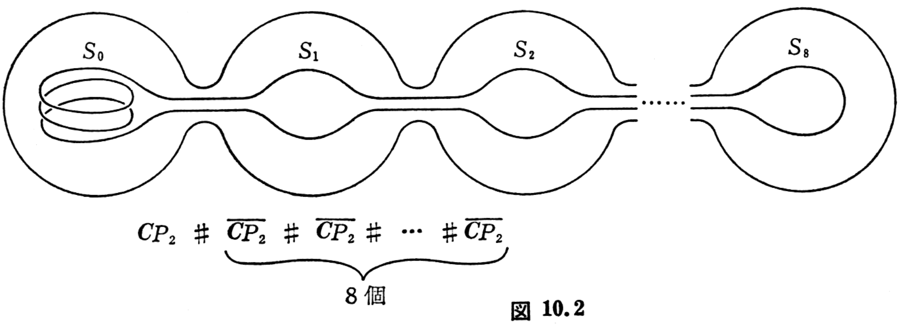


図 10.2

もひとつの2次元球面である．仮定によって，S_0 は $3\alpha \in H_2(\boldsymbol{CP}_2)$ というホモロジー類を表わす．また各 S_i は対応する $\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ の生成元 $\alpha_i \in H_2(\overline{\boldsymbol{CP}_2})$ を表わしている．よって球面 $S_0 \# S_1 \# S_2 \# \cdots \# S_8$ の表わすホモロジー類は

$$3\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_8 \in H_2(\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z} \quad (9\text{個の } \boldsymbol{Z} \text{ の直和})$$

である．このホモロジー類を ξ とおく．$\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ の交点形式は，$\boldsymbol{CP}_2$ や $\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ の交点形式の直交和であるから（§9.3），$\xi = 3\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_8$ とそれ自身の交わり数 $\xi \cdot \xi$ が次のように求められる．

$$\begin{aligned} \xi \cdot \xi &= (3\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_8) \cdot (3\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_8) \\ &= 9(\alpha \cdot \alpha) + (\alpha_1 \cdot \alpha_1) + (\alpha_2 \cdot \alpha_2) + \cdots + (\alpha_8 \cdot \alpha_8) \\ &= 9 - 1 - 1 - \cdots - 1 \\ &= 9 - 8 = 1. \end{aligned}$$

各々の $S_0, S_1, S_2, \cdots, S_8$ が局所平坦であることから，連結和 $S_0 \# S_1 \# S_2 \# \cdots \# S_8$ も $\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ の中で局所平坦であることが証明され，$S_0 \# S_1 \# \cdots \# S_8$ を‘中心線’とする（$\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ の中での）管状近傍 B_n がある．§9.4 の最後の補助定理のすぐ前で注意したように，B_n の‘中心線’の自分自身との交わり数は n でなければならない．ところが，上で計算したように，$S_0 \# S_1 \# \cdots \# S_8$ とそれ自身の交わり数は $\xi \cdot \xi = 1$ であった．これから $n=1$，すなわち $S_0 \# S_1 \# \cdots \# S_8$ の管状近傍は B_1 でなければならないことがわかる．

$N = (\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}) - \mathrm{Int}(B_1)$ とおこう．N は4次元の境界をもつ多様体である．その境界 ∂N は B_1 の境界 ∂B_1 と共通である．§9.4 の最後の補助定理によって $\partial B_1 \cong S^3$．よって N も S^3 という境界をもっている．B_1 の境界に沿って4次元円板 D^4 をはり合わせたものが $\boldsymbol{CP}_2$ であった．N も S^3 という境界をもつから，その境界に沿って4次元円板 D^4 をはり合わせ，4次元閉多様体にすることができる．それを M としよう：$M = N \cup D^4$．

逆に，$N = M - \mathrm{Int}\,(D^4)$，$B_1 = \boldsymbol{CP}_2 - \mathrm{Int}\,(D^4)$ と考えれば，$\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2} = N \cup B_1$ という分解は $\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ を $M \# \boldsymbol{CP}_2$ という別の連結和で表わしたことに相当している．

ここで得られた4次元閉多様体 M の性質を調べよう．M には $\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}$ と同じ‘向き’を与えることにし，M を向きづけられた多様体と考える．

【補助定理】 M は II 型の交点形式をもつ．

証明 $\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2} = M \# \boldsymbol{CP}_2$ から $H_2(\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}) \cong H_2(M) \oplus H_2(\boldsymbol{CP}_2)$．したがって，$H_2(M)$ の任意の要素 η を $H_2(\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}$（9個の $\boldsymbol{Z}$）の要素と考えることができる．そう考えた上で $\eta = m_0\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_8\alpha_8$ とおこう．証明すべきことは，η と η の交わり数 $\eta \cdot \eta$ が偶数であることである．

$H_2(M) \cong H_2(M - \mathrm{Int}\,(D^4)) \cong H_2(N)$ であるから，η は N の中の2次元サイクル y で表わされると思ってよい．ところが，$N = (\boldsymbol{CP}_2 \# 8\overline{\boldsymbol{CP}_2}) - \mathrm{Int}\,(B_1)$ であって，B_1 は $S_0 \# S_1 \# \cdots \# S_8$ の管状近傍であった．このことは，N の中の2次元サイクル y と，（2次元サイクルとしての）$S_0 \# S_1 \# \cdots \# S_8$ との交わりが全くないこと，したがって交わり数が0であることを意味している．ホモロジー類に移れば，$\eta \cdot (3\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_8) = 0$ ということである．ここに $\eta = m_0\alpha + m_1\alpha_1 + \cdots + m_8\alpha_8$ を代入して

$$(m_0\alpha + m_1\alpha_1 + \cdots + m_8\alpha_8) \cdot (3\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_8) = 3m_0 - m_1 - \cdots - m_8 = 0$$

がわかる．

さて，考えるべき $\eta \cdot \eta$ であるが，これを $m_0, \cdots, m_8$ で表わせば

$$\begin{aligned}\eta \cdot \eta &= (m_0\alpha + m_1\alpha_1 + \cdots + m_8\alpha_8) \cdot (m_0\alpha + m_1\alpha_1 + \cdots + m_8\alpha_8) \\ &= m_0^2 - m_1^2 - \cdots - m_8^2\end{aligned}$$

となる．右辺の $m_0^2 - m_1^2 - \cdots - m_8^2$ から $3m_0 - m_1 - \cdots - m_8$（$=0$ であった！）を引けば

$$\begin{aligned}&(m_0^2 - m_1^2 - \cdots - m_8^2) - (3m_0 - m_1 - \cdots - m_8) \\ &\qquad = (m_0 - 3)m_0 - m_1(m_1 - 1) - \cdots - m_8(m_8 - 1)\end{aligned}$$

であるが，この最後に得られた $(m_0-3)m_0 - m_1(m_1-1) - \cdots - m_8(m_8-1)$ は，個々の

$m_0(m_0-3), m_1(m_1-1), \cdots, m_8(m_8-1)$ がどんな $m_0, m_1, \cdots, m_8$ についても偶数になるから，確かに偶数である．こうして $\eta\cdot\eta$ がどんな $\eta \in H_2(M)$ についても偶数になることがわかった．よって M はII型の交点形式をもっている．補助定理の証明ができた．

ところで M の符号数を計算してみよう．$CP_2\#8\overline{CP_2}=M\#CP_2$ であったから，符号数の和公式（§9.3）によって

$$\mathrm{sign}(CP_2)+8\,\mathrm{sign}(\overline{CP_2})=\mathrm{sign}(M)+\mathrm{sign}(CP_2).$$

これから $\mathrm{sign}(M)=8\,\mathrm{sign}(\overline{CP_2})=-8$ がわかる．これは矛盾である！　補助定理によれば，M はII型の交点形式をもっているから，ロホリンの定理によって，その符号数 $\mathrm{sign}(M)$ は 16 で割り切れなければならない．$\mathrm{sign}(M)=-8$ になることはあり得ないはずなのである．

この矛盾はどこから生じたか．言うまでもなく，$3\alpha \in H_2(CP_2)$ というホモロジー類が，局所平坦に埋め込まれた球面 S_0 で表わされる，と仮定したことからである．よって，そのような S_0 は存在しない．これで定理 10.3 が証明された．

この巧妙な議論はケルベアとミルナーによるものであるが，ロホリンの定理が2次元球面を4次元多様体に（局所平坦に）埋め込むための障害になっている様子がわかると思う．

現在では次の事実が知られている．

【定理 10.4】 $H_2(CP_2)\cong \boldsymbol{Z}$ の要素 $m\alpha$ が，局所平坦に埋め込まれた2次元球面で表わされるための必要十分条件は $|m|\leqq 2$ である．（ここに α は $H_2(CP_2)\cong\boldsymbol{Z}$ の生成元である．）

4次元多様体の中で，CP_2 と並んで典型的な $S^2\times S^2$ ではどうだろうか．

【定理 10.5】 $H_2(S^2\times S^2)\cong \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ の生成元を α,β とする．$H_2(S^2\times S^2)$ の要素 $p\alpha+q\beta$ は，p,q の少くとも一方が0または ±1 なら，局所平坦に埋め込まれた S^2 で表わされる．p,q ともに0でも ±1 でもないとき，もし p,q が互いに素でなければ（すなわち ±1 以外の公約数があれば），$p\alpha+q\beta$ は局所平坦な S^2 の埋め込みでは表わせない．

では，p,q が0でも ±1 でもなく，しかも互いに素であったらどうなのか．実は全く何も知られていない．たとえば $2\alpha+3\beta$ というホモロジー類が，$S^2\times S^2$ の中に局所平坦に埋め込まれた S^2 で表わせるかどうかさえ未解決である（ウォールの問題）．

いままでのところ，$2\alpha+3\beta$ を‘局所平坦に埋め込まれた S^2’で表わすことが不可能であるという理由は何もない．それにもかかわらず，$2\alpha+3\beta$ を S^2 で表わそうとするすべての試みが挫折してしまうのである．それは‘可能であるがひどく技術的に難しいこと’なのか，それとも，‘未だ知られていない理由によって不可能’なのか，何ともわからないのが現状である．(1983年，久我健一により不可能であることが示された．）

§10.3　ポアンカレのつまづき

H. ポアンカレの名前は誰しも一度は耳にしたことがあると思う．この本でもすでにポアン

カレの双対定理が登場している．『科学と仮説』などの本でも知られているフランスの有名な数学者である．

そのポアンカレが，前世紀の末に‘位置解析’(Analysis Situs) と題する大きな論文を書いた．その中で彼は，ホモロジーの概念を明らかにし，多様体の向きづけ可能性，不可能性を区別し，多様体における交叉の理論などを展開した．ポアンカレの双対定理もこの論文の中で述べられている．さらに基本群の導入やオイラー標数の理論的研究も行なっている．‘Analysis Situs’ は現代的なトポロジーの礎を一挙に築いた記念碑的な論文であると言うことができる．

その後，約 10 年の間に彼はこの論文に 5 つの補足を書いた．2 番目の補足の終りの所で，彼はある‘定理’を証明なしに述べている．それを現代的な言葉使いになおし，かつ 3 次元多様体の場合にあてはめて述べてみると次のようになる．

‘定理’ M を連結な 3 次元閉多様体とする．もし $H_1(M) \cong \{0\}$ なら M は 3 次元球面 S^3 に位相同形である．

確かに 2 次元の場合には，すでに §8.4 で見たように 1 次元ホモロジー群が自明群になる閉曲面は S^2 しかなかった．しかし，実はこの事実は 2 次元に特有であって 3 次元には通用しない．ポアンカレの述べた‘定理’は間違いだったのである．彼は彼自身の強い‘直観’に裏切られたと言うべきだろうか．

誤りにも‘良い間違い’と‘悪い間違い’がある．凡人はよく（＝しばしば）間違えるが，天才は良く（＝うまい具合に）間違える．天才の誤りは往往にして生産的であるらしい．

ポアンカレはこの誤った‘定理’を発表してから 4 年後の 1904 年に‘位置解析への第 5 の補足’を書いた．その中で，彼は，彼自身の‘定理’に対する反例を構成した．**ポアンカレの球面**とよばれる 3 次元閉多様体がそれである．

ポアンカレの球面は 1 次元ホモロジー群は自明群になるが，基本群が自明群にならない特殊な 3 次元閉多様体である．基本群が自明群でないから，もちろん，3 次元球面 S^3 と位相同形ではない．このような 3 次元多様体が存在することは，すなわち，彼の主張した‘定理’が誤っていたということである．

ポアンカレの球面は，単に彼の‘定理’の反例に止まらなかった．近年になって，トポロジーの理論におけるその重要性が再認識され始めている．そのことについては次の § で触れることにして，この § ではポアンカレとは異なる方法で彼の‘球面’を構成しよう．この方法はミルナーによるものである．

まず，§9.4 に出てきた‘鉛管工事’について思い出しておこう．そこでは $S^2 \times D^2$ と $D^2 \times S^2$ を $D^2 \times D^2$ に沿ってはり合わせる操作を‘鉛管工事’(plumbing) とよんでおいた．一般的な‘鉛管工事’はこれを少し拡張したものである．すなわち，はり合わせる多様体は必ずしも直積 $S^2 \times D^2$ ではなく，‘ねじれた直積’つまりバンドルを考える．また，2 個のバンドルをはり合わせるばかりでなく，一般には有限個のバンドルをはり合わせる．

はり合わせ方は，前と同様で，互いに‘直交する’ようにはり合わせるのである．これをもう少し詳しく説明する．そのために，バンドルの射影について説明しておくのが便利であろう．

明らかに，任意の直積 $X \times Y$ は2つの射影をもっている（cf. §3.3）．$X \times Y$ の要素 (x, y) に，x を対応させるのが第1射影とよばれる写像 $X \times Y \longrightarrow X$，$(x, y)$ に y を対応させるのが第2射影とよばれる写像 $X \times Y \longrightarrow Y$ であった．バンドル B_n は D^2 と S^2 の‘ねじれた直積’であったから，直積の場合に似た射影 $B_n \longrightarrow S^2$ をもっている．ただし，それがねじれた直積であるため D^2 方向への射影はない．この事情はメビウスの帯を見るとよくわかると思う（図 10.3）．メビウスの帯は D^1（線分）と S^1 のねじれた直積と考えられる．メビウスの帯 M は S^1 方向への射影 $\pi: M \longrightarrow S^1$ をもっているが，D^1 方向への自然な射影はない．

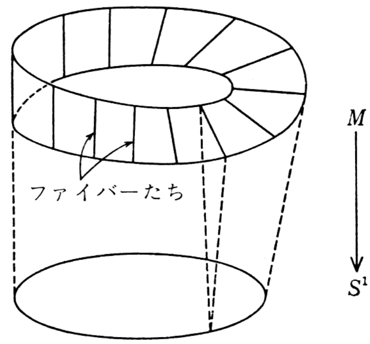


図 10.3　ファイバー・バンドルとしてのメビウスの帯

§9.4 で構成したように，バンドル B_n は2つの直積 $D^2{}_+ \times D^2$ と $D^2{}_- \times D^2$ を，n 回ねじりの PL 同形 f: $(\partial D^2{}_+) \times D^2 \longrightarrow (\partial D^2{}_-) \times D^2$ ではり合わせたものであった．$D^2{}_+ \times D^2$ と $D^2{}_- \times D^2$ はそれぞれ射影

$$\pi_+ : D^2{}_+ \times D^2 \longrightarrow D^2{}_+, \qquad \pi_- : D^2{}_- \times D^2 \longrightarrow D^2{}_-$$

をもっている．この2つの射影を合わせて，バンドルの射影 $\pi: B_n \longrightarrow S^2$ $(S^2 = D^2{}_+ \cup D^2{}_-)$ を作るのである．注意しなければならないのは，$f: (\partial D^2{}_+) \times D^2 \longrightarrow (\partial D^2{}_-) \times D^2$ によって $D^2{}_+ \times D^2$ と $D^2{}_- \times D^2$ をはり合わせる際，π_+ と π_- とが矛盾なくはり合わさるか，ということである．実際，それは大丈夫である．なぜなら，$(\partial D^2{}_+) \times D^2$ の点 (p, q) を考えてみる $(p \in \partial D^2{}_+,\ q \in D^2)$．それは f によって $(p', q') \in (\partial D^2{}_-) \times D^2$ という点に写るとする．$S^2 = D^2{}_+ \cup D^2{}_-$ の赤道として $\partial D^2{}_+$ と $\partial D^2{}_-$ を同一視してしまえば，f の定義（図 9.13 を見よ）から f は点を $S^1 (= \partial D^2{}_+ = \partial D^2{}_-)$ の方向にはずらさないので，p と p' とはその赤道上の同じ点であると考えられる．とくに S^2 の点として $p = p'$ である．したがって π_+ によって点 (p, q) は p に写り，π_- によって点 $f(p, q) = (p', q')$ は p と同じ p' に写るが，これは PL 同形 f が π_+ と π_- とを矛盾なくはり合わせることを意味している．こうして，π_+ と π_- を合わせて，射影 $\pi: B_n \longrightarrow S^2$ が得られた．S^2 をバンドル B_n の**底空間**とよぶ．また，任意の点 $p \in S^2$ について $\pi^{-1}(p) \cong D^2$ であるが，これを p 上の**ファイバー**とよぶ．B_n は，さらに一般的な，**ファイバー・バンドル**とよばれる‘ねじれた直積’の一例である．B_n は S^2 を底空間とし，D^2 をファイバーとするファイバー・バンドルになっている（図 10.3 参照）．

さて，B_n の底空間 S^2 の中に，ひとつの円板 $D^2{}_0$ をとろう．その円板 $D^2{}_0$ をどこにとっても，射影 $\pi: B_n \longrightarrow S^2$ による $D^2{}_0$ の逆像 $\pi^{-1}(D^2{}_0)$ は直積 $D^2{}_0 \times D^2$ に PL 同形であることが証明できる．ここではそのように一般的な主張は必要でなく，$D^2{}_0$ が $D^2{}_+$ または $D^2{}_-$ に含まれてしまうような小さい円板であるときだけを考えればよい．そのとき，たとえば $D^2{}_0 \subset D^2{}_+$ なら，$\pi^{-1}(D^2{}_0) = \pi_+{}^{-1}(D^2{}_0) \subset D^2{}_+ \times D^2$ であるから $\pi_+{}^{-1}(D^2{}_0) = D^2{}_0 \times D^2$ と

なることは明らかであろう．$D^2{}_0 \times D^2$ は底空間方向の円板 $D^2{}_0$ とファイバー方向の円板 D^2 の直積である．

もうひとつ別のバンドル B_m をもってくる．やはり底空間 S^2 の中に小さな円板 $D^2{}_1$ をとる．$\pi: B_m \longrightarrow S^2$ による $D^2{}_1$ の逆像 $\pi^{-1}(D^2{}_1)$ は $D^2{}_1 \times D^2$ と考えられる．

B_n と B_m をこの直積部分 $D^2{}_0 \times D^2$, $D^2{}_1 \times D^2$ に沿ってはり合わせよう．ただし，ファイバー方向の円板と底空間方向の円板を入れかえてはり合わせるのである．つまり，$D^2{}_0 \times D^2$ の点 (p, q) を $D^2{}_1 \times D^2$ の点 (q, p) に同一視するのである．これが B_n と B_m を‘直交するように’はり合わせることの意味である．B_n と B_m を直交する方向にはり合わせる操作が‘鉛管工事’(plumbing) にほかならない．

鉛管工事をしばしば図 10.4 のような図式（グラフ）で表わす．数字 n, m をつけた両端の黒丸がそれぞれ B_n, B_m を表わしており，それを線分で結んだのは B_n と B_m を鉛管工事でつなげることを示している．

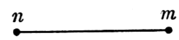


図 10.4

たとえば，($B_0 = S^2 \times D^2$ であるから) 図 10.5 の図式は，§9.4 で考えた鉛管工事に対応している．そこで示されたように，この構成で得られる 4 次元多様体は $S^2 \times S^2 - \mathrm{Int}\,(D^4)$ であり，その境界は S^3 である．

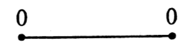


図 10.5

3 つ以上のバンドル $B_m, B_n, \cdots, B_l$ についても鉛管工事が考えられる．図 10.6 の図式は 3 つのバンドルについての鉛管工事を表わしているが，その様子を絵にすると図 10.7 のようになる．

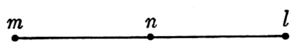


図 10.6

さて，やや天降り的であるが図 10.8 のような図式に対応する鉛管工事を考える．この図式は **E_8 型のディンキン図式**とよばれ（鉛管工事とは無縁の）リー群の理論に登場する興味ぶかい図式である．この図式には頂点が 8 個あり，すべて 2 という数字がつけられている．そこで‘ねじれの数’が 2 であるようなバンドル B_2 を 8 個もってきて，それらを上の図式に従ってはり合わせるのである．その様子は図 10.9 が示している．

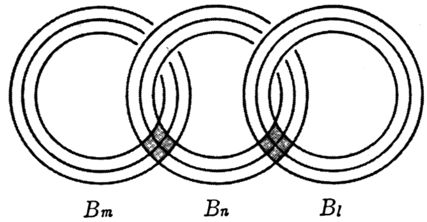


図 10.7

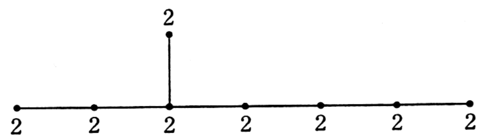


図 10.8

この鉛管工事で得られた 4 次元多様体を **E_8 多様体**とよぶことにしよう．記号で $M(E_8)$ と表わすことにする．$M(E_8)$ の境界 $\partial M(E_8)$ は連結な 3 次元閉多様体になっている．この境界が，ポアンカレの球面なのである．これをポアンカレの頭文字をとって P と書くことにする: $P = \partial M(E_8)$. §8.3 で触れたファン・カンペンの定理を繰り返し使って P の基本群を計算することができる．その計算の過程は，ここで

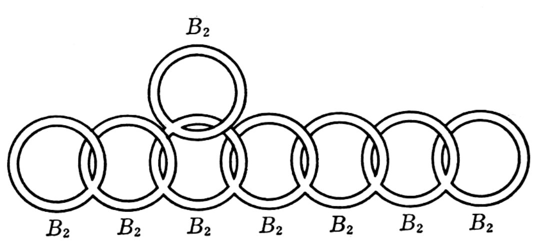


図 10.9

は述べないけれど，最終的結果は次のようになる．（基本群の基点 x_0 を書くのは略した．）

【定理 10.6】 P の基本群 $\pi_1(P)$は次のような表示をもつ：

$$\pi_1(P) \cong \langle a, b \,|\, a^5 = b^3 = (ab)^2 \rangle.$$

この表示を $\langle a, b \,|\, a^5 = b^3,\ b^3 = (ab)^2 \rangle$ と書いても同じことであるが，これは $\langle a, b \,|\, a^5 b^{-3} = e,\ b^3(ab)^{-2} = e \rangle$ の簡略形と思うことができる．

基本群の表示に基づいて，P の1次元ホモロジー群 $H_1(P)$ を計算してみよう．そのために $\pi_1(P)$ を可換化する．（§8.5 を見よ．）$\pi_1(P)$ を可換化して，加法群の記号で $\pi_1(P)$ の関係式を書きなおしてみると

$$5a = 3b = 2a + 2b$$

を得る．移項により変形して $5a = 3b$ かつ $b = 2a$ となるが，$b = 2a$ を $5a = 3b$ に代入すると，$5a = 6a$．よって $a = 0$，$b = 0$ を得る．結局 $H_1(P) \cong \{0\}$（自明群）がわかった．

ところが，可換化する前の $\pi_1(P)$ は自明群ではない．これは，$\pi_1(P)$ の表示 $\langle a, b \,|\, a^5 = b^3 = (ab)^2 \rangle$ だけを見ていても，すぐにはわからないことである．実際，たったいま示したように，さらに $ab = ba$ という関係をつけ加えれば，一見より複雑な表示 $\langle a, b \,|\, a^5 = b^3 = (ab)^2,\ ab = ba \rangle$ になるが，これは自明群を表わしている．

群 $\pi_1(P) \cong \langle a, b \,|\, a^5 = b^3 = (ab)^2 \rangle$ が自明群でないことをいうため，次のような準同型写像 $f : \pi_1(P) \longrightarrow S_5$ を構成しよう．ここに S_5 は 5次の対称群である（§7.1 参照）．

まず，a, b の行き先を

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

と定める．§7.1 例3で説明した方法で計算すれば，$(f(a))^5 = e$，$(f(b))^3 = e$ が容易にわかる．また

$$f(a)f(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

であって，これから $(f(a)f(b))^2 = e$ も出る．すなわち，$f(a)$，$f(b)$ は

$$(f(a))^5 = (f(b))^3 = (f(a)f(b))^2 = e$$

という関係を満たしている．

記号 a, b を文字とする任意の語を $w(a, b)$ と書こう．いま $w(a, b)$ と $w'(a, b)$ が $\pi_1(P)$ の同じ要素を表わしているとする．すると，$w(a, b)$ と $w'(a, b)$ とは一見，形は違っていても $a^5 = b^3 = (ab)^2$ という関係を使って，一方を他方に変形することができる．a, b の所にそれぞれ $f(a), f(b)$ を代入した $w(f(a), f(b))$，$w'(f(a), f(b))$ は S_5 の要素である．$f(a)$，$f(b)$ も同じ関係 $(f(a))^5 = (f(b))^3 = (f(a)f(b))^2$ を満たすのだから，$w(a, b)$ を $w'(a, b)$ に変形したのと全く同じプロセスによって $w(f(a), f(b))$ を $w'(f(a), f(b))$ に変形できる．このことは，$\pi_1(P)$ の中で $w(a, b) = w'(a, b)$ なら S_5 の中でも $w(f(a), f(b)) = w'(f(a), f(b))$ が成り立つことを意味している．（$f(a), f(b)$ は $(f(a))^5 = (f(b))^3 = (f(a)f(b))^2$ という関係ばかりでなく，これ全体が実は単位元 e に等しいというさらに強い関係も満たして

いるのだから $w(a,b) \neq w'(a,b)$ であっても $w(f(a),f(b)) = w'(f(a),f(b))$ となることがあり得る.)

$\pi_1(P)$ の任意の要素 $w(a,b)$ に S_5 の要素 $w(f(a),f(b))$ を対応させる写像を $f:\pi_1(P) \longrightarrow S_5$ とする. 上に述べたことから, この定義はちゃんと意味をもっている. f が準同型写像になることは定義から明らかであろう.

$\pi_1(P)$ の像 $f(\pi_1(P))$ の中には, $f(a)$, $f(b)$ など確かに単位元でない要素が含まれているから, $\pi_1(P)$ が自明群でないことが証明された.

なお, 像 $f(\pi_1(P))$ は5次の交代群 A_5 に一致する. A_5 は $5!/2 = 60$ 個の要素を含んでいて, $f:\pi_1(P) \longrightarrow A_5$ の Kernel (核) は $\boldsymbol{Z}_2$ に同型である. したがって $\pi_1(P)$ は A_5 の2倍の 120 個の要素を含んでいる.

興味深いことは, A_5 は正 20 面体群に同型になることである. 正 20 面体群というのは, 3次元ユークリッド空間の回転のうち, 原点を中心とするひとつの正 20 面体をそれ自身に移すもの全体のなす群である. $\pi_1(P)$ は $f:\pi_1(P) \longrightarrow A_5$ によって A_5 を2重に被覆しているように考えられるのでしばしば**2重正 20 面体群**とよばれる.

以上がポアンカレの球面に関する説明である.

ポアンカレはこの多様体を構成した論文'位置解析への第5の補足'の中で次の意味の問題を提出した.

……なるほど, 1次元ホモロジー群が自明群であっても必ずしも3次元球面に位相同形でないことがわかった. では, 基本群が自明 (すなわち単連結) な多様体ならどうだろう. 単連結な3次元閉多様体は3次元球面に位相同形になるのだろうか?……

今日, この問題は3次元の**ポアンカレ予想**とよばれている. この予想はその後, トポロジーを発展させる大きな原動力になった. しかし彼の時代からすでに 70 年以上の歳月が流れたにもかかわらず, ポアンカレ予想自身は未解決の大問題として残されている. (p. 174 の注参照)

●ノート

(1)　**一般次元のポアンカレ予想**　もともとのポアンカレ予想は3次元多様体に関するものであるが, それを次のように一般の n 次元の予想に拡張することができる.

一般次元のポアンカレ予想　n 次元球面 S^n とホモトピー同値な n 次元閉多様体は S^n に位相同形になるだろうか.

3次元閉多様体については単連結という条件と, S^3 にホモトピー同値という条件とが同じになるのである. 3次元のポアンカレ予想は非常に難しい. まして, それを一般次元に拡張した予想など解決不可能に思われる. ところが意外なことに, 一般次元のポアンカレ予想は5次元以上の場合にスメール (S. Smale) によって解決されてしまった (1962). スメールは滑らかな多様体についてこの予想を証明したが, PL 多様体については (やはり5次元以上の場合に) ジーマン (E. C. Zeeman) とスターリングス (J. Stallings) によって解決された. PL 多様体の場合には, S^n とホモトピー同値なら S^n に PL 同形であることまで示せるのであ

る（$n \geqq 5$）.

前の §10.2 で，高次元の多様体は球面の埋め込み等に関しても抵抗が少ないことを述べておいたが，このように技術的難点がないことが高次元のポアンカレ予想が先に解決されてしまった理由である．

3次元と4次元についてはいまだに解かれていない．低次元（3次元と4次元）の多様体には多くの技術的な難しさがある．しかも，現状ではその難しさの本質は十分に究明されていない．（4次元ポアンカレ予想は1981/2年に Freedman が解いた．）

（2）　**一般次元の‘鉛管工事’**　この § で説明した鉛管工事を一般の次元に拡張することができる．S^{2n} を底空間とし，D^{2n} をファイバーとするバンドルを考え，それらを鉛管工事でつなげるのである．こうして $4n$ 次元の PL 多様体が得られる．いま，とくに E_8 型のディンキン図式に沿って鉛管工事を行ない，得られた多様体を $M^{4n}(E_8)$ と書くことにする．$4n \geqq 8$ の場合には，この多様体の境界 $\partial M^{4n}(E_8)$ は S^{4n-1} にホモトピー同値になることがわかる．すると高次元のポアンカレ予想から，それは S^{4n-1} に PL 同形である．よって $M^{4n}(E_8)$ の境界に沿って $4n$ 次元円板 D^{4n} をはり合わせることができて，$4n$ 次元の PL 閉多様体 $M^{4n}(E_8) \cup D^{4n}$ が得られる．

次の § で示すように，$M^{4n}(E_8) \cup D^{4n}$ は II 型の交点形式をもち，しかもその符号数は8である．

このように，ロホリンの定理によって4次元では存在の禁止されている型の PL 多様体が，8次元以上では立派に存在するのである．

$M^{4n}(E_8)$ は PL 多様体として構成された．$M^{4n}(E_8)$ はゴツゴツしていて‘カド’をもっているが，うまい具合にカドを丸めてやると，滑らかな $4n$ 次元多様体 $M^{4n}(E_8)'$ ができる．この多様体の境界 $\partial M^{4n}(E_8)'$ も位相的立場では $\partial M^{4n}(E_8)$ と同じであり，S^{4n-1} に位相同形である．

ところが驚くべきことに，$\partial M^{4n}(E_8)'$ は滑らかな多様体（可微分多様体）としては S^{4n-1} と異なるものである．

この境界は，いわゆるエキゾチック球面にほかならない．エキゾチック球面はミルナーによって別の方法で発見された（1957）．彼は7次元の場合に，S^7 と位相同形でありながら，可微分多様体としては S^7 と異なる滑らかな多様体を構成して，微分位相幾何学という新しい分野を切り開いたのである．

（なお，上で構成した $4n$ 次元 PL 閉多様体 $M^{4n}(E_8) \cup D^{4n}$ からは絶対に‘カド’がとれない．言いかえれば，滑らかな多様体にならないことが証明されている．）

§10.4　三角形分割と4次元トポロジー

ロホリンの定理の奇妙な性格のひとつは，それが4次元の定理でありながら，高次元位相多様体の三角形分割や基本予想の理論にもかかわりをもつことである．この事情は 1969 年にカ

ービーとジーベンマンによって決定的に明らかにされた．この§では，位相多様体の三角形分割問題にロホリンの定理がどのように関係するかをひとつの具体例によって示してみよう．

$M=M(E_8)$ を前の§10.3で（鉛管工事によって）構成された4次元のPL多様体とする．

【定理 10.7】 M の交点形式は非特異かつII型であり，その符号数は8に等しい．

‘ハテナ，このような4次元多様体が存在することは，ロホリンの定理で禁止されていたはずだが’と思われるかも知れない．しかし，定理10.7はロホリンの定理に矛盾しない．ロホリンの定理（§10.1）は非特異でかつII型の交点形式をもち，符号数が8に等しいような4次元PL閉多様体の存在を禁ずるものである．定理10.7の多様体 M は空でない境界（それはポアンカレ球面だった！）をもっており，閉多様体ではないのである．

定理10.7を証明するため，まず $H_2(M)$ を計算しよう．M は，‘ねじれの数’が2に等しいバンドル B_2 を8個とり，それらを E_8 の図式に従ってはり合わせたものだった．バンドル B_2（一般に B_n）はその中心線 S^2 を変形レトラクトにもっている．よって $H_2(B_2)\cong H_2(S^2)\cong \boldsymbol{Z}$．しかも8個の B_2 たちは4次元円板 $D^2\times D^2$ の所ではり合わせられるのだから，マイヤー－ヴィエトリスの定理が適用できて，$H_2(M)$ は8個の $H_2(B_2)$ の直和になる．

$$H_2(M)\cong \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z} \qquad (8\text{個の }\boldsymbol{Z})$$

これらの $\boldsymbol{Z}$ の生成元を $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_8$ としよう．各 α_i は i 番目の B_2 の‘中心線’S^2 によって表わされる．ただし，i 番目の B_2 は鉛管工事において次の位置にあるものとする．E_8 型の図式の上で示すと図10.10のようになる．α_i と書かれた位置が i 番目の B_2 の位置である．

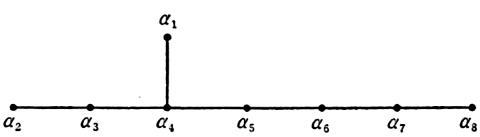


図 10.10

生成元 α_i の間の交わり数は，鉛管工事の構成を考えてみれば容易に求まる．まず，α_i とそれ自身の交わり数 $\alpha_i\cdot\alpha_i$ は α_i を表わす S^2 の B_2 の中での交わり数に等しいから，§9.4で説明したように B_2 の‘ねじれの数’に等しい．すなわち $\alpha_i\cdot\alpha_i=2$ である．

α_i と α_j $(i\neq j)$ の交わり数は次のようにして求まる．上の図式において，頂点 α_i と α_j が線分で結ばれていれば，対応する‘中心線’S^2 は1点において‘直交する方向に’交わっている．この交わりの符号は，M の‘向き’を適当に決めて1とすることができる．よって $\alpha_i\cdot\alpha_j=1$ である．もし頂点 α_i と α_j が線分で結ばれていなければ，対応する S^2 は互いに交わらないから $\alpha_i\cdot\alpha_j=0$ である．

α_i の間の交わり数を表（行列）で表わすと見やすい．α_i と α_j の交わり数 $\alpha_i\cdot\alpha_j$ を i 行 j 列の位置に書くのである．

$$\begin{array}{c} \\ i\text{ 行} \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc} & j\text{ 列} \\ & \vdots \\ \cdots\cdots & \alpha_i\cdot\alpha_j \\ & \\ & \end{array}\right]$$

交わり数 $\alpha_i\cdot\alpha_j$ は対称 $(\alpha_i\cdot\alpha_j=\alpha_j\cdot\alpha_i)$ であるから，この行列も対称になる．すなわち，i 行 j 列の数と j 行 i 列の数は等しい．

上で求めた α_i の間の交わり数を具体的に表で書くと次のようになる．

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

この行列はしばしば E_8 行列とよばれる．この行列を見ると‘対角線’の数 $\alpha_i\cdot\alpha_i$ はすべて偶数2である．このことから M の交点形式がII型であることがわかる．なぜなら $H_2(M)$ の任意の要素 ξ は $\xi=\sum_{i=1}^{8}m_i\alpha_i$ という整数係数の和で表わされ，その交わり数は

$$\begin{aligned}\xi\cdot\xi &= \left(\sum_{i=1}^{8}m_i\alpha_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{8}m_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{8}m_i^2(\alpha_i\cdot\alpha_i)+2\left(\sum_{i<j}m_im_j(\alpha_i\cdot\alpha_j)\right)\\ &=2\left(\sum_{i=1}^{8}m_i^2\right)+2\left(\sum_{i<j}m_im_j(\alpha_i\cdot\alpha_j)\right)\end{aligned}$$

すなわち偶数になるからである．

M の符号数を計算するため，§9.2 補助定理の証明の方法で M の交点形式を対角化しよう．それを能率的に行なうには，§9.2 のケース1のように基底をとりかえた場合，交わり数の行列がどのように変化するか見ておくのがよい．

以下記号の便利のため，$x, y\in QH$ について §9.2 で $\tilde{h}(x,y)\in \boldsymbol{Q}$ と書いた値を簡単に $x\cdot y\in\boldsymbol{Q}$ と書くことにする．

まず，始めの基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ について，$\alpha_i\cdot\alpha_j=s_{ij}\in\boldsymbol{Q}$ であるとする．$s_{11}\neq 0$ と仮定する．§9.2 のケース1に従って，

$$\alpha_1'=\alpha_1,\qquad \alpha_i'=\alpha_i-\frac{s_{1i}}{s_{11}}\alpha_1\quad(i=2,\cdots,n)$$

とおく．

そこで計算したように $\alpha_1'\cdot\alpha_i'=\alpha_i'\cdot\alpha_1'=0$ であった $(i=2,\cdots,n)$．よって $\alpha_i'\cdot\alpha_j'$ を表わす行列では，第1行，第1列とも s_{11} 以外は0になる．

また，$i,j\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\alpha_i'\cdot\alpha_j' &= \left(\alpha_i-\frac{s_{1i}}{s_{11}}\alpha_1\right)\cdot\left(\alpha_j-\frac{s_{1j}}{s_{11}}\alpha_1\right)\\ &=\alpha_i\cdot\alpha_j-\frac{s_{1i}}{s_{11}}(\alpha_1\cdot\alpha_j)-\frac{s_{1j}}{s_{11}}(\alpha_i\cdot\alpha_1)+\frac{s_{1i}s_{1j}}{s_{11}^2}(\alpha_1\cdot\alpha_1)\\ &=s_{ij}-\frac{s_{1i}s_{1j}}{s_{11}}-\frac{s_{1j}s_{i1}}{s_{11}}+\frac{s_{1i}s_{1j}s_{11}}{s_{11}^2}\end{aligned}$$

$$= s_{ij} - \frac{s_{i1}s_{1j}}{s_{11}}$$

よって，基底を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ から $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n'$ に変えると，行列は次のように変わる．

$$\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots\cdots & s_{1j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ s_{i1} & \cdots\cdots & s_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \Rightarrow i> \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & \cdots & \overset{\overset{j}{\vee}}{0} & \cdots \\ 0 & & & \vdots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & s_{ij}-\dfrac{s_{i1}s_{1j}}{s_{11}} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \end{bmatrix}$$

（$s_{i1}=0$ または $s_{1j}=0$ ならば s_{ij} は不変なことに注意）

新しく得られた行列で，もし2行2列の数が0でなければ，全く同様の基底の変換（とりかえ）を $\alpha_2', \cdots, \alpha_n'$ にほどこすことにより，行列の2行2列以下の部分を変えていくことができる．

行列の変化のしかたがわかった以上，もはや‘基底の変換’をいちいち意識することなく，単に行列の変形と思ってもよい．具体的に E_8 行列についてやってみよう．（何も書いてない行列の部分は0を表わしている．）

$$\begin{bmatrix} 2 & & & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 3/2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 3/2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 3/2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 3/2 & & & & & \\ & & & 5/6 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 3/2 & & & & & \\ & & & 5/6 & & & & \\ & & & & 4/5 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 3/2 & & & & & \\ & & & 5/6 & & & & \\ & & & & 4/5 & & & \\ & & & & & 3/4 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 &&&&&&& \\ & 2 &&&&&& \\ && 3/2 &&&&& \\ &&& 5/6 &&&& \\ &&&& 4/5 &&& \\ &&&&& 3/4 && \\ &&&&&& 2/3 & 1 \\ &&&&&& 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 &&&&&&& \\ & 2 &&&&&& \\ && 3/2 &&&&& \\ &&& 5/6 &&&& \\ &&&& 4/5 &&& \\ &&&&& 3/4 && \\ &&&&&& 2/3 & \\ &&&&&&& 1/2 \end{bmatrix}$$

これで対角化が完了した．対角線上に並んでいる数はすべて正数であるから，$M(E_8)$ の符号数は 8 である．また，それらの積は $2\cdot 2\cdot \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$ である．したがって§10.1 の定義によって $M(E_8)$ の交点形式は非特異である．これで定理 10.7 が示せた．

さて，前のように $P=\partial M(E_8)$ をポアンカレ球面とする．P に関して錐構成可能な位置に 1 点 p_0 をとり，錐 p_0*P を作る（cf. §5.4ノート(1)）．その錐を境界 P に沿って $M(E_8)$ にはりつける．これを X^4 としよう：$X^4=M(E_8)\cup(p_0*P)$.

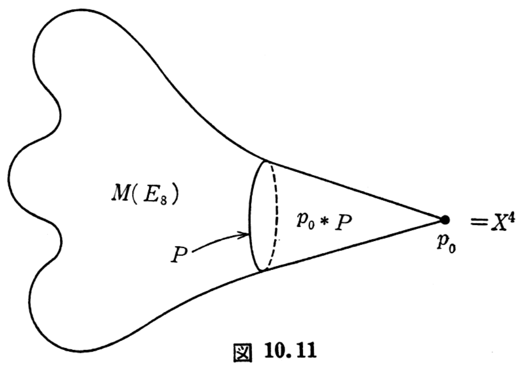


図 10.11

X^4 は 4 次元の多面体であるが PL 多様体にはならない．X^4 における p_0 のまつわり多面体 $|\mathrm{Link}(p_0;X^4)|$ はポアンカレ球面 P に PL 同形であって S^3 ではないからである（cf. §6.2）．X^4 は p_0 以外では PL 多様体になっている．'特異点' p_0 の所で X^4 は多様体になれないのである．ポアンカレ球面がその障害になっている．（図 10.11 参照）

X^4 と S^1 の直積を作ってみよう．上と同様の議論によって $X^4\times S^1$ は多面体ではあるが PL 多様体ではない．$\{p_0\}\times S^1$ に沿って特異点が並んでいる．ところが 1977 年に，エドワーズ（R. Edwards）とキャノン（J. Cannon）により，次の事実が証明された．

【定理】 $X^4\times S^1$ は 5 次元位相多様体になる．

この定理は，1963 年にミルナーによって提出された**2重懸垂問題**とよばれる問題が，肯定的に解決されたことの系として得られる．エドワーズとキャノンは 2 重懸垂問題を解決したのである．彼らの議論は非常に複雑で，それをここでまとめるわけにはいかないが，あまり'美しくない'野生的現象を根気よく調べるタイプのトポロジーが背景になっていることをつけ加えておく．

さて，位相多様体 $X^4\times S^1$ は $X^4\times S^1$ という形の多面体の構造をもっている．しかし $X^4\times S^1$ は PL 多様体ではなかった．ではこの位相多様体は何らかの 5 次元 PL 閉多様体に位相同形になるのだろうか．実は，それは不可能なのである．いいかえれば，この位相多様体は，PL 多様体に三角形分割することが不可能である．

その証明は概略，次のようなものである．

もし，この位相多様体が PL 多様体 N^5 に位相同形になったとする．すると，N^5 の中に次の性質 ①,② をもつ4次元 PL 閉多様体 L^4 が埋め込まれていることが（トポロジーの標準的手法によって）証明できる．① L^4 は向きづけ可能かつ連結である．② N^5-L^4 も連結である（図 10.12).

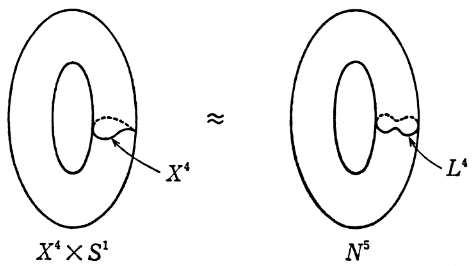


図 10.12

さらにこのような状況では L^4 の性質は X^4 の性質に似ていることが（再びトポロジーの標準的議論によって）証明される．とくに X^4 の構成（図 10.11）から，L^4 の交点形式は $M(E_8)$ と同じく II 型であり，しかもその符号数はやはり $M(E_8)$ と同じ8であることが示せる．L^4 は4次元の PL 閉多様体であるから，今度こそロホリンの定理に矛盾してしまう．

したがって，位相多様体 $X^4\times S^1$ は PL 多様体に位相同形にはならない．ロホリンの定理が，この位相多様体を PL 多様体として三角形分割するための障害になっているのである．

5次元以上のすべての多様体についても同じことがいえる．ある位相多様体が PL 多様体に三角形分割できないとき，その障害として現われるのは必ずロホリンの定理である．カービーとジーベンマンはこのことを理論的に明らかにしたのであった．当時はまだ2重懸垂問題が未解決だったので，‘PL 多様体に位相同形にならない位相多様体’を $X^4\times S^1$ として構成することは知られていなかったが，今日では上のような‘手軽な’方法により，ロホリンの定理が三角形分割問題にかかわる様子を見ることができるのである．（ロホリンの定理は基本予想の障害にもなっている．これもカービーとジーベンマンにより示されたことである．）

上に実例としてあげた位相多様体は，どんな PL 多様体にも位相同形にならないことがわかったが，しかし $X^4\times S^1$ という多面体であることは確かである．では，PL 多様体に位相同形にならない位相多様体でも，ある多面体には位相同形になるのだろうか．この問題も現在未解決である．

ロホリンの定理という4次元の定理が，位相カテゴリーと PL カテゴリーの差を，5次元以上のすべての次元にわたって支配していることが理解していただけたと思う．しかし，不思議なことに，肝心の4次元の多様体については（しかも4次元についてのみ），三角形分割問題も基本予想も未解決のままである．そこには，いったい，どんな秘密が隠されているのだろうか．（「12年後のあとがき」参照）

p. 158［ロホリンの定理］への注

本来のロホリンの定理は「4 次元 PL 閉多様体 M が概平行性をもてば，M の符号数は 16 で割り切れる」というものであって，M の単連結性の仮定は不必要である．ただし，p. 158 のように述べると，単連結性（あるいはやや一般的に $H_1(M) = \{0\}$）を仮定する必要がある．なぜなら，その仮定のもとで，「M の交点形式がII型であること」と「概平行性」が同値になるからである．概平行性の定義は，付録 3「トポロジーにおける高次元と低次元」の中で与えてある．

旧版の『四次元のトポロジー』では，ロホリンの定理の述べ方に少し不適切なところのあることを，東大大学院生の菊池和徳氏をはじめとする何人かの人から注意されました．ここに記して感謝します．

p. 167 への注

ポアンカレ予想は，2002, 3 年にペレルマンにより解決された．あとがき「30 年を経て」参照．

第∞章

“4次元”とは何だろう

加藤十吉・小島定吉・福原真二・松本幸夫

●なぜ4次元か？

松本 1950～60年代に微分トポロジーの大発展があったのですが，それはよく知られているように，5次元以上のトポロジーの世界が問題だったわけです．その基礎になっているのはホイットニー（Whitney）のトリックであり，それが5次元以上の多様体が非常にうまいこと理論構成できた理由になっているわけです．ところが，3次元，4次元というのは，そういうホイットニーのトリックが不幸にして使えないのです．

そこに何かがあるんじゃないかというのが4次元をやる最初の動機だったと思いますが，個人的なことになるんですけれど，僕は4次元をやる前に，余次元（co-dimension）が2であるような部分多様体の位置の問題というのをやっていました．それまでは余次元が2という部分多様体は仲々つかまえきれないで，今4次元が当面しているのと同じような感じがしてました．つまり余次元が3以上の部分多様体には，ジーマンの unknotting theorem（結び目解消定理）といって，“n 次元球面の中に $n-3$ 次元以下の球面が入っていれば，それは区分的線形な（PL）カテゴリーではスタンダードに入っていると思える”という定理があるのです．その定理が余次元が2の場合に成り立たないのは，よく知られた“結び目の現象”が起きてしまうからです．そういうことから余次元が2の領域は非常に特殊な領域と思われたのですが，その理論的根拠を明らかにしたいと思って余次元2というのをやった結果，個人的な結論としては，特異なエルミット形式の代数的理論というのが，ひとつの難しさの原因であったと思うんです．

そういう理論的根拠のようなものを4次元で何か分りたいというのが，4次元をやる僕個人の理由でして，4というのは 2+2 だから，余次元2を二つやれば4次元のような情報が得られるのではないか．4次元に対応した，何か複雑な代数的な対象があって，その代数を研究すれば，4次元にある程度幾何学的な結論が出るのではないかと思ったのですが，最近の4次元の動向を見ていると必ずしもそうはなっていない．

そういう意味で，4次元の難しさというのは，決して代数的な構造の難しさではなく，まさに幾何学的な難しさであるという感じが今しているのです．つまり，代数的な不変量で捉えきれないような特殊な現象が，4次元にはあるのではないかということなんです．それを捉えるには，非常に幾何学的な研究か，もしかしたら解析的な不変量が必要なのであって，従来のトポロジーの不変量をいくら代数的に整理してやってみても何らの情報も得られないという領域が4次元ではないかと思っているんです．

福原 余次元の方では“特異である”という代数的な難しいひとつの条件があり，4次元の方ではホイットニートリックが成り立たないというのが現象としてあるわけで，そのまた原因を納得いくまで知りたいということなんですね．それで，4次元の場合，代数的にはダメだろうというのはどういうことなんですか．

松本 例えば $S^2\times S^2$（2次元球面×2次元球面）についても，$2\oplus3$ を球面の埋め込みで表わす問題は，どんな代数的なテクニックでも，ホイットニーの定理がなぜ使えないかというところに何もひっかかってこない．今までの代数的不変量では全然つかまえられな

いために，そこに何か新しい代数的不変量を定義してそれをつかまえようとしたのですが，そこではどんな代数的不変量も消えてしまうらしいのです．

それはなぜかというと，キャッソンという人がキャッソンハンドルと呼ばれる，巧妙なコンストラクションを考えたのですが，そのキャッソンハンドルというものによって，実際に 2⊕3 は $S^2 \times S^2$ の中で実現されてしまうわけです．したがって，$S^2 \times S^2$ の中の 2⊕3 というのが実現できないということを証明するためには，そのキャッソン氏の構成した開多様体がナチュラルなものではなく，実にエキゾチックなものであるということを証明する必要があるわけですが…….

●歴史的背景

加藤　話がやや専門的になってきたようですから，いま話しているような事柄の高次元における背景について，ちょっと説明しておいた方がいいようですね．

ポアンカレがトポロジーを始めたということですが，彼は微分多様体を対象にして，単体あるいは胞体分割によって組合せ的に研究する方法を編み出し，ホモロジー群とか基本群がトポロジーの重要な道具になったんです．そしてその後，そのホモロジー群，基本群といった多様体に伴う代数的不変量によって，多様体の幾何的性質が分るかという問題が出てきたわけで，それが“3次元閉多様体が単連結ならば3次元球面と同相であろう”という「ポアンカレの予想」を中心に発展してきました．

先ほど言われた 1950～60 年代の微分トポロジーの大発展というのは，主に多様体のトポロジー（多様体の微分同相あるいは同相分類）とホモロジー，基本群，あるいはポアンカレ以後大いに発展した代数的トポロジー，それらが一体になる時期だったわけです．

松本　幸福な次元のわけですね．

加藤　その一体となる原因になったものとして，まずトムのコボルディズム（同境）理論が挙げられます．トランスバーサリティという概念を仲介にして多様体の同境分類がホモトピー論で記述される時代になったわけです．これは多様体の分類としては，大まかな分類でした．その後，スメールが高次元のポアンカレ予想“5次元以上のホモトピー球面が実際に球面に同相である”ということを証明しました．

そこで使われた本質的議論，とりわけホモロジー論と幾何を結び付けるものは何かというと，トランスバーサリティあるいは general position（一般の位置）です．この議論が極めて精密化された形で出てきたのが，ホイットニーのトリック（交点解消法）なのです．つまり，このホイットニーのトリックによって得られる，交点解消補助定理が general position の議論を代数的トポロジーと高次元の多様体のトポロジーを結び付ける主要因にしたわけです．

その結合においてしばしば問題になるのは，ある球面から多様体の中への連続写像が与えられたとき（球面というのはいろいろな次元の球面があるわけですが）それが embedding（埋蔵）にホモトープとなるか，つまり多様体の中の本当の球面で実現できるか？ということです．この問題で最も困難な場合にホイットニーのトリックが有効に使われ，そういうことができる次元が5次元以上だというわけです．

そして，それを同じように4次元以下の多様体に下げようとするときに，ホイットニーのトリックは実は成立しないということ，すなわち，4次元多様体の中の2次元の部分多様体に対して，ホイットニーのトリックは成立しないということが証明され，ここで高次元で幸運にも実現された代数的トポロジーと多様体の幾何学との結合が見事に崩されたのです．

4次元の中の2次元ということは，余次元 4−2 が2であるということです．例えば，3次元球面の中の1次元の単一閉曲線（knot，結び目）の“結び”の現象が 3−1＝2 でやはり余次元2の現象です．そしてこの結び目というのが極めて多様なのですが，結び目の理論を余次元2という点でそのまま高次元に平行移動してやると，結び目を含んでいるような大きな多様体の次元が5次元以上の場合には高次元の自由さによってよりよく分るということがいえるのです．

そこで松本さんは，それがちょうど重複する4次元の中の2次元の問題に焦点を当てたのだと思います．

福原　5次元以上では，代数的な情報で幾何的なものが分るわけですね．代数的な量，例えばホモロジーの元を実際に球面で実現できるというのが，代数と幾何を結び付けるカギになっているわけで，それがホイットニーのトリックなんですね．

加藤　その場合に，余次元が多様体の次元の半分以下

であるという条件は当然ついてくるわけで，それだけでいいんだというのがスメールのハンドル分解の見方ですね．すなわち“多様体の次元の半分以下の次元でのホモロジーの情報が分れば，それより上の次元のホモロジーが分る”というポアンカレの双対定理を背景としてハンドル分解の双対分解に着目することによって余次元が中間次元以上の状況を考えればいいことになります．スメールは単連結 h-同境定理の証明の中でこのような点を見抜いています．この意味では，スメールの透徹した見通しがなくては，そういうものが生きなかったと思うんだけれども，とにかく，問題の本質は，中間次元でのホモトピー群の元を埋蔵で実現するということだと思うのです．

松本　それがすべてのカギみたいなものですね．だから，もしポアンカレ予想の反例が出るとしたら，今まで判定できなかった2次元の球面の埋め込みが判定できるというのが，最初のステップじゃないかと思います．

●キャッソンのハンドル

松本　そこで先の話に戻るのですが，2次元球面を4次元の中に実現したいというのが最初の問題だけれども，キャッソンのハンドルはある程度それを実現している．S^2 上の2次元ユークリッド空間バンドル（つまり，ファイバーが2次元ユークリッド空間であって，しかも底空間が2次元球面であるようなバンドル）は，全空間は開多様体になっているのだけれども，それと同じ固有ホモトピータイプを持っているような，ある4次元開多様体が存在して，それによって実現できる．すなわち，今までの代数的な不変量で捉えきれない2次元サイクルというのはすべてそれで実現できるというのがキャッソンの定理です．だから，従来よりもほんの一歩でも進もうと思ったら，すぐにキャッソンのハンドルというのを判定しなければならないという問題にぶつかるわけです．

加藤　判定するということはどういうことですか．

松本　つまり，キャッソンの構成した4次元の開多様体が通常の2次元球面上の R^2 バンドルとは微分同相ではないということを証明するということですね．もしそれが微分同相ならば，今まで埋め込めるか埋め込めないかが判定できなかったような球面は全部埋め込めちゃうわけです．

小島　さっきの $2\oplus3$ に限っていうと，位相的埋め込みはあるんですね．

松本　位相的埋め込みはありますね．それはエドワーズの定理じゃないかと思います．

小島　だからキャッソンの結果よりも強いことがいえるわけですね．

松本　ただ，スムーズのやつがあるかどうか．あるいは局所平坦な PL 埋め込みがあるだろうかというと，それは全然分っていないわけです．

だけど，キャッソンのハンドルというのは，自然なハンドルとはとても思えないのですが．どうですか．

小島　いや，とても思えませんね．

今までの高次元の不変量というのは，入っている多様体がコンパクトということをほとんど使わないですね．それに比較すると，4次元ではコンパクトとノンコンパクトが大変違うと思うんです．さらにコンパクトでも，閉じているときと境界のあるときでは大変な違いがある．そうすると，コンパクトということにディペンドした不変量を求めるというのは，いい問題だと思うんです．それにディペンドさせないと，とても変な例が一杯ありますからね．

松本　全く言われた通りの気がしますね．高次元の多様体というのは，コンパクト，ノンコンパクト，クローズドに関係なく，同じテクニックが使われたのですが，4次元は質的に違うんじゃないかという気がするな．

加藤　ところが，逆にコンパクトの中にオープンなものが入り得るわけで，それが入り乱れているところにまた難しさがあるわけですね．

●野性的方法

松本　キャッソンのハンドルを判定するためには，iterated Whitehead link（反復したホワイトヘッドの絡み目）というのがあって次々に複雑になっていくのです．その n 回反復したホワイトヘッドの絡み目というのは，どれも二つの円周を3次元球面に埋め込んだものなのですが，3次元球面を4次元球体の表面と思っているわけです　そして，その n 回反復したホワイトヘッドの絡み目が4次元球体の中で二つの，お互に交わらない，なめらかな2次元円板を張るかというのが問題になってきます．キャッソンの4次元開多様体が自然なものでないということを判定するためには，

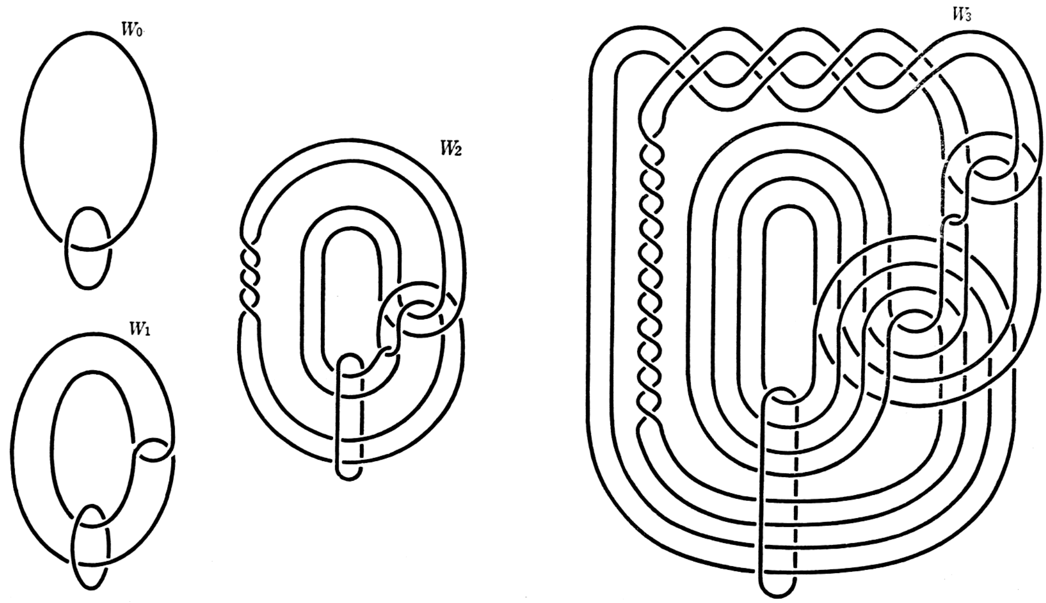


図　ホワイトヘッド絡み目の系列

すべての n について，n 回反復のホワイトヘッド絡み目が，4次元球体の中で，二つの互いに交わらない2次元円板を張らないということを証明すればよい．

その場合，n が2以下なら今までの代数的不変量がひっかかって判定できるのですが，n が3以上になると今まで知られているすべての不変量が消えてしまう．しかも，その n が，3, 4, 5, 6, …，1億でも2億でも，すべての n についてそれを判定しないことには，キャッソンの開多様体というのは結局はよく分らないと思うんです．だから，いかに4次元というのがひどく渾沌とした世界かということが，そこで分ると思うのですが，……

加藤　ちょっと注意しなければいけないと思うのですが，互いに交わらないディスクを張るといった場合に，それは単なるディスクですか．

松本　そうですね．局所平坦なディスクです．

加藤　要するに，なめらかなディスクですね．最近のエドワーズの結果は，トポロジカルに野性的に埋め込まれたもので張るということですね．

福原　別々に？

松本　ええ，別々に交わらずに．それは n が4以上ならば張るそうです．その証明は出てないから……．

加藤　いま話してることは最先端のことで，証明は完全な論文で出版されていないような情報を交換しているのですが，ただ，その中で重要なテクニックとしては，代数的につかまえられる事実が，トポロジカルな，野性的な仕方で実現されるということですね．

ポアンカレ以来，組合せ的な方法というのができたわけです．ところが一方，ポーランド学派というか，いわゆる点集合論的トポロジーの方からも強力な手法がトポロジーに入っていて，それがアメリカで発展した．

松本　しかも，それを多様体に限って進めたわけであまり一般的な空間は考えない．だから general topology ともちょっと違いますね．

加藤　その手法は，初め病的な例を作るための道具であるとみられていたのです．ところが，それが本質的にトポロジーで使われるようになります．メーザーとブラウンによるシェンフリースの予想の解決においてです．その中でメーザーが infinite repetition method（無限反復法）という位相同形を作る方法を編み出したわけです．ところがそれは PL 化できない．無限反復法は，組合せ的方法と対置させるべき重要なテクニックであるといえます．

4次元のトポロジーで無限反復法によって，代数的事実を幾何的事実として反映させようという動きが出てきたというのは重要なことだと思います．

松本 成功したのはみんな無限反復法ですね．ですから4次元でも，今までの代数的不変量が全部消えてしまうようなところでは，もしかすると無限反復法がそれを捉えるかもしれませんね．

加藤 キャッソンハンドル自体も無限反復法でできるのですか．

松本 そうですね．

加藤 だから，無限反復の使用状況が，ある意味でメーザーの考えていたものとは違って，代数的トポロジーとつながっている．

●交叉の理論

松本 ミルナーの higher linking number（高次絡み数）も，2次元までのホモロジーの状況で全部決まってしまうわけですから，ミルナーの高次といっても，先の n 重ホワイトヘッド絡み目の意味では深くなっていかない．高次というのが横にそれてしまうわけで，そういうところにも少し問題があるような気がするんです．つまり，今までの代数的な不変量というのは，全部そういう限界を負っていると思うんです．

小島 その意味でも，n 重ホワイトヘッド絡み目というのは，4次元からの要請ではなくて，既にアイレンベルグ(Eilenberg)時代から問題になっていたんですね．"n-linked" とかいう，ものすごい題名の定理なんです．

加藤 交叉の理論を幾何学化する障害としてホイットニーのトリックが効かないという事実があるのですが，ミルナーはそういうことを既に絡み目理論で見ていたと思うんです．キャッソンハンドルの構成で，ある程度交叉の理論が出てくるんですね．自己交叉をもつ球面でまず実現しておくのです．そして，ホイットニートリックが効かないんだけれども，その補空間の基本群の lower central series というものを考えればある程度幾何学的状況が把握できるということが，キャッソンハンドルの存在を裏付けていると思うんです．ですから情報はあるけれども，幾何的事実を見つけるということがまだ不十分だという気も逆にするんです．

松本 無限反復法をまだ十分にやりきっていないかもしれないんです．あれをもっとやっていって，交点形式がII型で符号数が8の位相多様体が無限反復法でできる可能性は十分あると思うんです．それは n 重反復ホワイトヘッド絡み目を判定しなくてもいいことですからね．それはもしかすると単に幾何学的なテクニックの問題だけかもしれない．無限反復のテクニックを極限まで推し進めていくと，位相的なカテゴリーでのロホリンの定理の反例が構成できるかもしれない．

加藤 そこへの期待は大きいのではないですかね．

小島 5次元以上でクインという人が ANR で DDP ならば resolution をもつとかいう結果がアナウンスされていますね．

加藤 ANR というのは Absolute Neighbor Retract（絶対近傍レトラクト），DDP は Disjoint Disk Property（円板分離性）ですか．

福原 resolution というのは特異点の解消？

松本 それは generalized manifold から特異点を解消するというのですね．

小島 つまり，多様体の一つの性格づけですね．

松本 あれを4次元でやるといいと思うんだけど．

加藤 ポアンカレのホモロジー 3–球面の double suspension が S^5 に同相であるという重要な結果があるのですが，その証明は純粋に点集合論的トポロジーの手法を駆使している．

福原 しかも一種の無限反復ですから……．

加藤 それの繰り返しですね．無限反復についてもう少し昔を振り返ってみると，まずペアノ曲線というのがあり，その次にホワイトヘッドの例——すなわち "単連結な開3次元多様体は $\boldsymbol{R}^3$ と同等であるか" という $\boldsymbol{R}^3$ についてのポアンカレ予想に対する反例——がある．それをそのまま4次元に平行移動するのはできないことでしょうが，4次元でキャッソンハンドルなどの状況がはっきりしてくると，その種の構成がもっと見えてくるのではないかという気がするんです．

松本 確かにそうかもしれないですね．これはできるかどうか分らないんだけど，例の E_8 行列の E_8 plumbing（鉛管工事）に錐を取りつけたホモロジー多様体といわれる特殊な多面体の特異点は1点だけあるわけですね．錐の頂点として特異点があるのですが，それを無限回反復の方法によって解消できないかというのが，非常に大きな問題だと思います．

それができれば，当然ロホリンの定理の位相的反例や，もっと積極的な意味では，位相カテゴリーの中に，スピンであって，w_2（第2スティーフェルホイットニー類）が消えるような4次元の位相多様体であり，し

かも閉多様体であり，さらにこの本で定義した符号数がちょうど8になるような多様体が，構成できるということがあると思うんです．それができれば，今までできなかった位相カテゴリーの中でのトランスバーサリティが可能になる．いろいろ便利なことがあるんだけれども，それ自身，非常に面白いことだと思います．

●4次元と高次元の違い

福原 ロホリンの定理をひとつのテーマにしてこの本を書いていますね．ロホリンの定理は，トポロジー全体の中で特異な定理で，注目すべき性質を含んでいると思うのだけれども……．4次元と高次元が違うということを突き詰めていくと，ホイットニーのトリックへ来るんですが，その前にいくつか現れていた現象があると思うんです．それがロホリンの定理ですか．

松本 それがやはり4次元の中で最初に現れた現象でしょうね．

福原 高次元では8のものがあるけれども，4次元ではどうしても 16 からしかない．

加藤 しかも，4次元の特異性が高次元における基本予想に関して障害のタネを与えているということですね．その意味ではロホリンの異常な現象は4次元特有のものだけれども，その特有さゆえに，それが高次元に及ぼす影響が非常に強いですね．ですから，カービー，ジーベンマンによって基本予想はある程度フォーミュレートされてきちんと分ったというけれども，基本予想が成り立たないのはどうしてかということを突き詰めていけば，4次元のロホリンの定理そのものをもう少し幾何学的に見なければいけないということになる．

福原 基本予想は高次元で解けたけれども，そこの出発点になっているらしい4次元の基本予想も，三角形分割定理も解けてない．そこが解ければ，高次元の現象が非常にすっきり説明できるわけです．

加藤 これは不思議なことで，高次元というのは非常に広い世界だと思っていたのだけれども，時空空間というところに高次元のすべての本質が隠されているともみられるわけです．

福原 それから，高次元では成立するけれども4次元では成立しないことが証明されていることがいくつかあります．例えば h-同境定理は，高次元と同じようには4次元，5次元では絶対いかない．

加藤 h-同境が4次元の場合に成立しないというのはどういうことか，説明していただけませんか．

福原 h-同境というのは，大ざっぱにいうと，“ホモトピー型でもって（ある多様体)×(閉区間）という形になっていれば，実際に（ある多様体)×(閉区間）に同相になるか”という予想ですね．高次元では，代数的なもので幾何的なものが大体決まるという原理に従って解けている．

加藤 それは高次元ポアンカレ予想を解いたスメールのテクニックですね．

福原 h-同境が4次元，5次元の場合には，その方法が使えなくて解けない．これは今のところ技術的に解けないということだけではなく，3次元，4次元で(多様体)×(閉区間）という形にならないものが必ずあるんだということが分っているわけですね．だから，高次元とははっきり違う世界であるということが，この点でもいえると思います．

●Rigidity と複素曲面

福原 4次元と高次元との違いについてもう一つの例として正多面体がありますね．5次元以上のユークリッド空間の中にある正多面体は3種類あるが，3次元では5種類で，4次元では6種類ですね．それは4次元の非常にはっきりした次元の特色だと思います．

加藤 それはまさにそうなんです．普通ユークリッドの正多面体というのは，球面上に移してやると，球面上の正多面体分割になるわけです．また，トーラスのようなユークリッド的な構造の入った多様体の正多面体分割もあるし，hyperbolic な空間での正多面体分割も考えられるわけで，そういうものの全体を考えると，5次元以上になると非常に poor になってしまう．ティピカルな例しかないんです．それに反して，3次元，4次元では豊富に現れる．正多面体というのは，ある意味で rigidity（剛体性）を表しているといえるわけで，その豊富さが4次元と3次元に十分あるということです．だから，先ほど野性的な方法，無限反復法がありましたが，その反面4次元はある意味では rigid な構造をも擁しているとみられるわけですね．

松本 3次元よりは rigid なところが少ないようですけれども……．

加藤 その rigidity に関しては，4次元多様体をな

ぜ研究するかというもう一つの理由として複素曲面があると思います．複素曲面はある意味で剛体性をもった対象なので…….

福原　4次元が rigid であるというのは，狭苦しいとか堅苦しいということですね．これは日本の住宅事情とよく似ていると思うんです．狭苦しい所に住んでいるけれども，家財道具やなんかはわりと豊富に持っている．複素曲面は，狭い空間に多くの2次元サイクルがぎゅうづめになっていて，ちょっと動かして整理するとか，かたずけることができない．豊かさと貧しさが共存しているというか，ある面では非常に多様な複雑なものがあるけれども，空間全体としては天井が低い．そういうところからいろいろな複雑な事情が生じているんじゃないかと思うんです．ホイットニーのトリックが効かないのも，何となく日本の住宅事情と同じような困難さがあると……(笑)

加藤　この本の本文にも「有限表示をもつ群は必ず4次元閉多様体の基本群として実現できる」と書いてありますね．

福原　だから，あらゆるものを生み得るということはあると思うんですが，そのかわり，分類したり整理したりしようとすると，すぐに障害物にぶつかってしまうわけです．

加藤　example はできるのですが，4次元多様体の様相を示唆するような，豊富な内容をもった例が欠けているということも事実でしょう．

福原　最近，絡み目と4次元多様体の関係が明らかにされた．(円周)×(2次元球面)をいくつか連結和してできる3次元多様体内の絡み目を考え，その絡み目に2次元のハンドルをくっつけて作ったものと，4次元多様体が対応している．そういう構成法があるわけだから，その絡み目自身を見ていれば4次元多様体を見ているのと同じことで，例は作ろうとすれば作れます．

松本　境界をもった4次元多様体を構成するのは非常にやさしいけれども，閉多様体を構成するのは極めて難しい．絡み目を見て，閉じた多様体を構成してみなさいといっても，ラッキーな場合にはできるかもしれないけれども，理論的にはできていないですね．

福原　つまり，絡み目が二つあって，それを見てこれとこれが等しいかということを判定する方法はあるが，その絡み目がすべて4次元多様体の閉じたものを表しているかというと，そうではない．

松本　だから，普通のコンパクトな4次元多様体と，境界のない閉じた4次元多様体との差がどの辺にあるかということも，大問題だと思います．

加藤　その閉じた多様体に関していえば，複素曲面がいい例を与えていると思うのですが，複素超曲面の場合，単連結閉4次元多様体について，やはりハンドル分解の問題があるわけですね．

松本　ハンドルは4次元だから1ハンドルから4ハンドルまであるのですが，それが1ハンドルをもたないようにハンドル分解できるかどうかというのが大問題だと思うんです．

小島　複素超曲面に関しては分っていて，1, 3 なしでできるんです．だけど，例のカービーが作ったのがありますね．4次超曲面と交点形式が全く同じような1, 3 がないものを，さっき福原さんが言われた方法で作っているんだけれども，あれが4次超曲面と微分同相であるかどうかというのはまだ判明していません．

松本　その4次超曲面はホモトピー $K3$ になっているわけですね．

小島　そうです．

松本　あれは実に不思議なんですね．交点形式というのが $(E_8 \oplus E_8) \oplus (S^2 \times S^2$ の交点形式$) \oplus (S^2 \times S^2$ の交点形式$) \oplus (S^2 \times S^2$ の交点形式$)$ となっているのです．なぜ三つ，$S^2 \times S^2$ の交点形式がついているかは，ロホリンの定理では捉えられないことです．それがなぜ取り除けないかというのが，また一つ大問題です．キャッソンの開多様体が実際のナチュラルなものだったら取り除くことはできるという証明ができるのですが，たぶんあれは違うだろうと．

福原　ただの飾りではないと．(笑)

松本　そういうものが自然についてしまうんだという，何か知られざる理由があるような気がしてしょうがないんです．

福原　それが閉多様体とコンパクト多様体との違いですね．交点形式 $E_8 \oplus E_8$ を閉多様体で実現しようとすると結局何か余分な物をくっつけないといけなくなり三つの $S^2 \times S^2$ みたいなものが必要になるのですね．

●小平の問題

加藤　ところで，ホモトピー $K3$ 曲面に関しては，

小平先生の問題がありますね.

福原　4次の超曲面とホモトピー型の等しい複素曲面が一杯発見されている. それらが微分同相かどうかという問題です. 代数幾何学の方では, ホロモルヒックな意味では違うものが沢山あるということは分っているけれども, 微分同相の意味で違うかどうかということは長年の懸案なわけです.

松本　またまたキャッソンですがあれがすべて正しいハンドルであれば, 4次元の h-同境定理は, 単連結の場合, 成り立つわけですね. つまり, 単連結の二つの多様体が h-同境ならば, それが微分同相になる. ウォールの定理により, ホモトピー同値ならばそれは h-同境であるということですからね. ですから, もしキャッソンのが正しければ, 小平先生の $K3$ 曲面は全部普通の $K3$ 曲面に微分同相になってしまう. そのこともちゃんとキャッソンの中に入っているんです.

加藤　ただ, $K3$ 曲面に関しては, べつにキャッソンの定理を証明するまでもなく, 直接証明できてもよさそうな感じが素人考えでするわけですが, その現状についてはどうなんでしょう.

松本　それはきびしい質問ですね. (笑) もしそれが微分同相でなければ, それを判定することは難しい問題だと思います.

加藤　ということは, 否定的な意味の判定ですね.

松本　そうです. だからすべての n 重のホワイトヘッド絡み目が判定できたということになるわけですから, ものすごい深い意味があるわけで, 現状ではそれは不可能でしょう.

加藤　逆に言えば, ホモトピー $K3$ 曲面と標準的 $K3$ 曲面との関係を徹底的に調べればキャッソンハンドルを判定することにもなるわけですね. しかし今のところはひっかかるものがつかまらないということですね.

●微分幾何的方法

松本　これは3次元の話ですが, 例のミークス－ヤウ (Meeks-Yau) という人の結果がありますね. 昔から知られていたデーンの補題という, 3次元多様体に重要な定理の微分幾何的な証明を見つけたというのです. これは古典的なプラトー問題などに関係してくるのですが, そういうような方法で2次元球面の実現とか, 実現に対する不変量というのが見つからないかということが, あるかもしれないと思うわけです.

いま2次元球面に実現できるかということは, 言い換えれば, あるホモロジークラスを実現する2次元曲面の最小の種数は何かという問題であるわけですが, その種数はいわばガウス・ボンネの定理を通じて曲率と関係してくるわけですよね. ですから, 微分幾何的なアプローチも可能ではあると思うんですけど.

加藤　そうですね. 4次元単連結多様体にトポロジカルな手法を使おうとするとすべってしまう. もうちょっと精密に構造を入れればひっかかるかもしれないですね. ミークス-ヤウの成功には3次元の特殊性というのが生きているわけでしょう. 彼の理論をそのまま4次元にもっていこうとすると, やはり自己交叉というのがポイントで出てくるわけですね.

小島　ミークス－ヤウがうまくいったのは解の regularity をいかに上げるかということだったでしょう. ところが, インマーションでとれるなんていう事実があると, その手法は楽ではないような気がするんです.

松本　特に解の regularity というのは3次元では証明できていますが, 4次元では反例があるわけでしょう. だから, そこは文字通り平坦ではないと思うけれども (笑), 要するに, 無限反復法などはすべてトポロジカルなアプローチで, 出てくる結果は位相カテゴリーの結果だけなんです. ところが, 何らかの PL カテゴリーあるいは微分可能カテゴリーでの結論を出そうとすれば, どうしても $S^2\times S^2$ の中の $2\oplus 3$ を判定する必要があるわけで, そこには微分幾何とか, 今までのトポロジーとは違うようなアプローチが必要なのではないかという気がするんだけれども.

加藤　デーンの補題の証明では, ある意味で自己交叉を許して実現しておいて, その交叉をどんどん解消していくというタワーを作る. そのタワーが有限の高さで止まってしまうということ, つまり反復が有限で終わるということが, 非常に重要な3次元トポロジーでの結果をひき起こしているわけです. その類似の現象が4次元でダメだということは, 松本さん達が証明している. これは最近の結果ですが, 松本さん達の方は開多様体で反例を作り, 小島さんはある条件下で肯定的に証明している.

松本　PL のカテゴリーと位相カテゴリーの差が, ちょうど開多様体とコンパクト多様体の差に対応してい

るのではないかという気がするんです．つまり，開多様体の場合にはトポロジカルでもダメだけれども，コンパクト多様体になると，もしかしたらどんな場合でも，位相的で OK じゃないかという気がするんです．

小島　そうなればありがたいですね．

●初心者へのアドバイス

加藤　今はトポロジーの言葉が明快に整理され，一つの分類に向かっての指針みたいなものがはっきりと示されていると言えるでしょうね．だから，何も知らない人でもそこに飛び込めば，指針に向かって方向が分るし，必要な道具も整備されている．当然それだけでは十分ではないけれども，4次元のトポロジーが研究しやすくなったということはいえると思うんです．

そういうところから，トポロジーのすべてのアイデアを集約して，3次元，4次元に向かっていけると思います．そういう意味で，もっと深い何かをつかむ可能性が秘められていると思うんです．

小島　僕は基本予想について，松本さん達がもたれている印象とはかなり違う印象で，学部の時に教わってきた感じがするんです．

最近のを見ていると，基本予想がくっついて発展してきたというのは認めるけれども，これからトポロジーをやるのだったら，スタンダードな方法で surgery を習って何とかという手法が必ずしもいいとは思わないんです．むしろできるだけ広い知識をもっていた方がいいのではないか．いまトポロジー自身が非常に発散しているわけだから，何もトポロジーのオーソドックスな教科書にこだわる必要は全くないと思うんです．

松本　今や何が起こるか分らないという状況ですね．今までのオーソドックスなトポロジーの流れのレールがなくなったみたいなんですね．

小島　ホモロジーを知らなくても力学系ならできるという方も，トポロジーの集会の若い参加者の中にはいますからね．

松本　確かにトポロジーというのは大きな遺産ではありますね．遺産というと何かもう終わっちゃったような感じだけど．（笑）いいものは沢山あるわけだけど，いくら遺産をいじくり回しても，それはもうしょうがないという時代になっていますね．

加藤　そういう意味では確かにピラミッドだね．

松本　新しい現象を見つけないことには…….

小島　3次元，4次元でも，やはりそういう状況なんでしょう．

加藤　新しい現象を見つけるには，ある程度その背景に何かの糧がなくてはいけないわけですね．その上に立って見つけるということだと思うんです．

トムにしたって，多変数関数論をやった時期もあったそうだし，スメールは非常にトポロジカルな考察力の優れた人ではあったけれど，彼がポアンカレ予想を解いたのとほとんど同時に出たのが dynamical system の論文なんで，そういう意味では広い視野をもっている．そしてそういうものが一体となって新しいものが生まれてくるのではないかと思います．

福原　僕は 2〜3 年前までは，3次元，4次元を職業にしていくのは冒険すぎる（笑），見通しの立たない商売だと言っていたんです．ところが最近は若い人でも頑張っていい結果を出しているので，単なる冒険に終わらず，実りの多い時期を迎えているという気もしますし，むしろどんどんやってほしいと考えています．

キャッソンハンドルが分らなければ一歩も先に進めないというわけではなく，ある程度中間的な段階の結果もだんだんできているんじゃないかと思うんです．

松本　一度にそこへ行くのは難しいんで，だんだんいろいろなものを重ねていかなきゃね．そういう意味では希望が多いといえば多いですね．

加藤　4次元は多様体のところで非常に深いものが交錯する場所であるということが，いえるのではないかという気がします．

福原　基本予想とか高次元の理論から情報を得て，4次元の不思議さが分ってきた時代があったけれども，これからは，ミークス－ヤウのやり方とか低次元のやり方と結び付くと，また一歩飛躍があると思うんです．今までは高次元と親戚関係のようでしたからね．

松本　3次元の方は低次元との関係でしたね．

加藤　高次元のトポロジーのいろいろなテクニックは，実は3次元のトポロジーからずいぶん影響されているんです．ところが，4次元で本質的に開発されたテクニックというのが未だにない．キャッソンハンドルはそうかもしれないけれども，もう一つ何かプラスしなければならないという気がするんです．それはこれからの若い人達の創意によるのかもしれませんね．（終）

文献案内

集合論については，現在，いろいろな書物が出版されているので，そのうちどれか適当なものをとって勉強されればよい．最近出版されている岩波の基礎数学の中にも，

[1] 彌永昌吉，彌永健一：集合と位相，岩波講座　基礎数学，解析学 I (i)，1977

の2分冊がある．**位相空間**についても，上の書物で十分であろう．より本格的に位相空間論を学びたい読者には，

[2] 児玉之宏，永見啓応：位相空間論，岩波書店，1974

がある．しかし，この本を読み通すには，かなりの覚悟がいると思う．

岩波基礎数学が出たついでに，本書に関係のある分冊をあげておくと，

[3] 志賀浩二：多様体論，岩波講座　基礎数学，幾何学 (i) の3分冊

[4] 服部晶夫：位相幾何学，岩波講座　基礎数学，幾何学 (ii)，3分冊

[5] 田村一郎：微分位相幾何学，岩波講座　基礎数学，幾何学 (iii)，3分冊

[6] 加藤十吉：組合せ位相幾何学，岩波講座　基礎数学，幾何学 (iv)，1分冊

等がある．いずれもみな，かなり本格的である．

中間値の定理と**最大値の定理**の証明については，適当な解析学の教科書を参照するよう述べておいたが，

[7] 高木貞治：解析概論，岩波書店

は最も標準的なものであろう．この書物 [7] の §11，定理 14 には，'閉区域（すなわちコンパクトな図形）上の連続関数の一様連続性' が述べられているが，この事実は，本書の §8.1，ノートで触れた．また [7] の付録 II には，Knopp によるペアノ曲線の構成法が紹介されている．

第5章の**複体**と**多面体**の項を書くにあたっては，

[8] 田村一郎：トポロジー，岩波全書

を参考にした．この本 [8] は，手ごろで読みやすい入門書である．§5.6 で，多面体のオイラー標数は分割によらないという定理（定理 5.3）を述べた．この定理の幾何学的な証明は，

[9] 本間龍雄：組合せ位相幾何，数学ライブラリー 29，森北出版

の方法によっている．前掲の加藤 [6] とこの本間 [9] とは，日本語による数少ない PL トポロジーの教科書として貴重である．第6章で述べた **PL 多様体**について学ぶには，この2つの本で十分であろう．

市販されている教科書とは言えないが，

[10] 加藤十吉：Knob と Handle の PL 位相幾何学，東京都立大学セミナー報告，1967

というタイプ印刷の薄手の本がある．PL トポロジー発展期の，若々しい雰囲気を伝える本である．大きな大学の数学図書室にはあると思う．同著者の

[11] 加藤十吉：トポロジー，サイエンスライブラリ，理工系の数学＝11，サイエンス社

には，2次元多様体に関する基本予想と三角形分割の新しい手法による証明がある．なお，3次元多様体の基本予想と三角形分割の証明は

[12] E. Moise: Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Graduate Texts in Mathematics

47, Springer-Verlag, 1977

に出ている．英文の PL トポロジーの教科書として

[13] J. F. P. Hudson: Piecewise Linear Topology, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969

をあげておこう．ただし，あまり読みやすくない．

群論の簡単な入門書として，たとえば

[14] 稲葉栄次：群論入門，新数学シリーズ 7，培風館

がある．この本 [14] は群の表示には触れていない．自由群や群の表示については，

[15] クロウェル，フォックス：結び目理論入門，寺阪英孝，野口広訳，現代科学選書，岩波書店，1967

の第3章以下を参照のこと．この本は読んでいて楽しい本であるが，残念なことに現在絶版らしい．英文でよければ，[15] の原書の改訂版が Springer 書店から出ている．

[16] R. H. Crowell, R. H. Fox: Introduction to knot theory, Graduate Texts in Mathematics 57, Springer-Verlag, 1977

このような英語の書物をじっくり読んでみるのも，大変勉強になると思う．

代数的トポロジーについては，前にあげた田村 [8] でだいたいまにあう．さらに本格的に学びたい読者は，前掲の服部 [4] や

[17] 小松醇郎，中岡稔，菅原正博：位相幾何学 I，岩波叢書 '現代数学' 6

などに挑戦してみたらどうだろう．これらはかなりページ数のある書物であるから，最後まで読み通すには大変な努力が要ると思う．しかし，読み通せないからといって悲観する必要は全然なく，手もとにおいて，必要な所だけを辞書のように拾い読みすればよい．

ファン・カンペンの定理 (§8.3) の証明は，田村 [8] の §34 にある．またクロウェル，フォックスの本 [15] または [16] の付録 III も，ファン・カンペンの定理の証明にあてられている．

第9章，**4次元多様体の符号数**のポイントは，多様体のホモロジー類の間の交叉の理論と，対称双1次形式の符号数である．前掲の服部 [4] は，第8章で，4次元とは限らない一般の位相多様体について交叉の理論を展開している．同書の第7章には，§9.2 で触れたポアンカレの双対定理の，一般的な形での記述がある．ポアンカレの双対定理については，田村 [8] §29 も見よ．

§9.2 で引用した符号数に関するシルベスターの定理の証明は，

[18] 齋藤正彦：線型代数入門，東京大学出版会

の定理 4.2 (p. 155)，または

[19] 佐武一郎：線型代数学，裳華房

の p. 160 などを見られたい．ちなみに，これらは線型代数学の標準的教科書と言えよう．

§9.2 のはじめに，有限生成アーベル群の部分群や剰余群は再び有限生成であるという事実を述べた．この事実は，剰余群については明らかであろう．部分群については，たとえば田村 [8] §11 を参照されたい．§9.3 で引用したマイヤー・ヴィエトリスの定理についても，田村 [8] §15 を読むのがよい．

第10章の主題は**ロホリンの定理**である．日本語の書物で，この定理の証明を述べているのは，前掲の田村 [5] が唯一のものであろう．田村 [5] の証明は，後述の Milnor-Kervaire (4) の証明に近い．§10.3 に出てきたファイバー・バンドルは

[20] N. Steenrod: The topology of fibre bundles, Princeton Math. Series 14, Princeton University Press, 1951

で体系的に展開された．この書物は古典的名著であるから，トポロジーを専門に勉強しようとされる読者の一読をおすすめする．§10.3 に引用した，ポアンカレ球面の基本群の計算は，田村 [8] §36 にある．(ポアンカレ球面の構成法は本書と異なっているが，空間としては同じものである．)

整数係数の非特異な対称双1次形式がもしII型なら，その符号数は8で割り切れるという定理の証明は

[21]　セール：数論講義，彌永健一訳，岩波書店

の第5章 §2，あるいは

[22]　J. Milnor–D. Husemoller: Symmetric bilinear forms, Springer-Verlag, New York, 1973

の第2章 §5 にある．

以上は，ほとんどが'教科書'であったが，次に本書で紹介した諸定理の原論文を少し紹介しよう．いずれも，著者，論文の題名，掲載誌名，巻数，出版年，掲載誌中のページ数，の順に書いてある．この順序は論文を引用する際の標準的形式である．掲載誌名に Ann. of Math. とあるのは，'Annals of Mathematics' というプリンストン大学で出している数学誌の略号である．また，Bull. Amer. Math. Soc. というのは 'Bulletin of the American Mathematical Society' の略で，アメリカ数学会の機関誌である．両方とも有名な数学誌である．

まず古いところでは

(1)　H. Whitney: The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, Ann. of Math. 45, 1944, 220—246

がある．本書の §10.2 や座談会にしょっちゅう出てくるホイットニーのトリックが初めて述べられた論文である．§10.2 で述べたようにホイットニーの方法は4次元で通用しない．それを明確に指摘したのは

(2)　M. Kervaire–J. Milnor: On 2-spheres in 4-manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 47, 1961, 1651—1657

が最初である．彼らの議論はロホリンの定理に基づく．ロホリンの定理は

(3)　V. A. Rohlin: A new result in the theory of 4-dimensional manifolds, Soviet Math. Doklady 8, 1952, 221—224

で発表された．この論文はロシア語のうえ説明に飛躍があって難解である．その後いくつかの別証明が与えられた．たとえば，

(4)　J. Milnor–M. Kervaire: Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin, Proc. I. C. M., Edinborough, 1958 (エディンバラでの国際数学者会議議事録)

(5)　M. F. Atiyah–F. Hirzebruch: Riemann-Roch Theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 65, 1959, 276—281

(6)　M. Freedman–R. Kirby: A geometric proof of Rochlin's theorem, Proc. of Symp. Pure Math. 32, Part 2, 1978

(7)　Y. Matsumoto: An elementary proof of Rochlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin, Birkhäuser 社, Progress in Math. 62, 1986

などに別証明がある．(4) の証明は球面のホモトピー群の計算に依存している．(5) の証明はベクトル・バンドルの特性類の理論や K-理論を駆使している．(6) はなるべく目でみえるような幾何学的な証明を探究したもの．(7) の証明は，たぶん，一番初等的であろう．はじめ，本書の中で (7) の内容も紹介する予定であったが，ページ数の関係上割愛せざるを得なかった．

4次元多様体の中に2次元球面を埋め込むための障害に関して，Kervaire–Milnor (2) 以後，いくつかの新しい結果が得られた．次の3つの論文が有名である．

(8)　A. G. Tristram: Some cobordism invariants for links, Proc. Cambridge Philos. Soc. 66, 1969, 251—264

(9)　W. C. Hsiang–R. H. Szczarba: On embedding surfaces in four-manifolds, Proc. of Symp. Pure Math. 22, 1971, 97—103

(10) V. A. Rokhlin: Two-dimensional submanifolds of four-dimensional manifolds, Functional Analysis and its Applications 5, 1971, 39—48

これらの論文で，$H_2(S^2\times S^2)\cong \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ の $p\oplus q$ は，p, q がどちらも0でなく互いに素でなかったら，$S^2\times S^2$ の中の滑らかな球面では表わされ得ないことがわかったが，p と q が互いに素であったらどうなるか，は未解決である．なお，(10) の著者の Rokhlin は，Rochlin = Rohlin = ロホリンと同一人物である．4次元多様体の分類については

(11) J. Milnor: On simply connected 4-manifolds, International Symposium on Algebraic Topology, Univ. Nacional Autonoma, Mexico City, 1958, 122—128

で，単連結4次元多様体のホモトピー型による分類が交点形式の代数的分類に対応する事が示された．その後

(12) C. T. C. Wall: On Simply connected 4-manifolds, J. London Math. Soc. 39, 1964, 141—149

という同じ題名の論文で，その分類が h-コボルディズムによる分類と一致することが示された．本書§10.1 に引用したウォールの定理は，この論文 (12) に出ている．

ロホリンの定理と多様体の三角形分割や基本予想との結びつきは

(13) R. C. Kirby-L. C. Siebenmann: On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1969, 742-749

という画期的な論文によって明らかにされた．この理論的大爆発の発火点になったのは

(14) R. C. Kirby: Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, Ann. of Math. 89, 1969, 575—582

である．4次元には直接関係はないが

(15) J. Milnor: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Ann. of Math. 64, 1956, 399—405

をあげておく．わずか7ページのこの論文の中で，エキゾチック球面が発見され，微分位相幾何学という新しい数学の地平が切り開かれたのであった．(§10.3 参照) また同じミルナーによる

(16) J. Milnor: Two complexes that are homeomorphic but combinatorially distinct, Ann. of Math. 74, 1961, 575—590

は，多面体に関する基本予想の反例を構成した論文として有名である．(§6.3 参照)

§10.3 で述べた高次元ポアンカレ予想の解決は

(17) S. Smale: Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, Ann. of Math. 74, 1961, 391—406

(18) J. Stallings: Polyhedral homotopy-spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 66, 1960, 485—488

によりなされた．(17) は滑らかな多様体について，(18) は PL 多様体についての解決である．(18) では多様体の次元は7以上と仮定されているが，これが5以上でよいことは，ジーマン (Zeeman) により示された．

以上，いろいろな文献をあげてきたが，まず，田村 [8] のような手ごろな教科書をきちんと一冊読みあげた上で，より専門的な教科書 ([3], [4], [5], [6], [9], etc. のうちの気にいった一冊など) に進み，その後 (あるいは教科書を読みつつ) 適当な原論文にあたってみることをおすすめする．

ミルナーは多くの名著を書いている．ある程度の予備知識があれば，どれも読みやすく，かつ見事である．そのうち最も近づきやすいものとして，

(19) J. Milnor: Topology from differentiable viewpoint, the University Press of Virginia, 1965

をあげておこう．

●付録1

4次元ポアンカレ予想の解決

●はじまり

4次元のポアンカレ予想が肯定的に解かれたらしい，という信じがたい噂が日本に伝えられたのは昨年（1981年）の秋の初めであった．フリードマン（Michael H. Freedman）という数学者がアメリカのサンディエゴ（San Diego）で開催された研究会の席上，その解決方法について報告を行なったというのである．彼の方法にはまだ少し難しいところがあって，それさえできれば解決できるというような内容の噂であった．そのころ，私自身は，4次元のポアンカレ予想には反例があるのではなかろうか，などと漠然と考えていた．しかし同時に，反例が構成されたとしても，それが反例であることを証明するためには，いわば‘無限に深い’不変量を構成してみせなければならないことも感じられていたので，反例の構成もまったく容易なことではないとも考えていた．こんなときに伝えられた‘4次元ポアンカレ予想の肯定的解決’の噂話は，それなりに衝撃的であったが，同時に半信半疑でもあった．

しかし，その後しだいに増えてくる情報の中で，事の真相が明らかになってきた．フリードマンがプリンストン大学で行なった講演の記録や，その他のノートの類が，ちょうどそのころプリンストンに到着したばかりの鈴木康正氏，またヴァージニアに留学中だった山崎正之氏等の手によって日本に送られてきたのである．

フリードマンは彼の最初の証明にあった難しいところを埋めてしまったようであった．山崎正之氏の手紙によれば，ある朝（？）ベッドの中のフリードマンに神のお告げがあったのだという．ガバッと飛び起きたフリードマンは証明の要点を大急ぎで書いて，山崎氏の先生のクィン（F. Quinn）氏のもとへ送りつけてきたのだそうである．この神の一撃によって，4次元ポアンカレ予想は解決されてしまった．いま（1982年春），フリードマンによる4次元ポアンカレ予想の解決は，ひとつの事実として認められるようになった．

●では，ポアンカレ予想とは

球面は最も簡単な多様体のひとつである．本誌の読者ならすでに多様体のことはよく御存知のことと思われるが，要するに，どこもかしこも一様な感じの空間であって，その中に入

ってみれば，自分のいる場所のまわりがあたかも n 次元ユークリッド空間の一部のように見える，というような空間である．これが n 次元の多様体である．円周は1次元の多様体であるし，閉曲面は2次元の多様体の例になっている．

多様体には2つの種類が区別される．どこまでもどこまでも無限のかなたまで拡がっている多様体と，全体として有限ではあるが境界はなく，自分自身で閉じているような多様体とである．2次元多様体でいえば，‘平面’は前者の例であり‘球面’や一般の閉曲面は後者の例である．前者を開（いた）多様体，後者を閉（じた）多様体とよぶ．球面は最も簡単な閉多様体の例である．

ポアンカレ予想は，この，簡単な多様体であるはずの球面の‘性格づけ’に関する問題である．

最近出版された『数学の歴史 $\mathrm{VIII_b}$，幾何学II』（寺阪英孝・静間良次著，共立出版）の第4章，トポロジーの項を開いてみると，ライプニッツの着想から始まった（という伝説のある）トポロジーが，リーマンやベッチ等の研究を通してしだいに発展し，ついにポアンカレの代数的トポロジーに結実するありさまが実に興味深く描かれている．（余談になるが，このようなトポロジーの歴史をみても，数学が，単に公理から定理へと，一歩一歩論証を進めるような形で，‘着実な’一本道の発展をしてきたわけでは全然ない，ということがよくわかる．）

いまのわれわれに関係ありそうなことを，この本の中から拾い出してみると，まず，リーマンの代数関数論から，閉曲面の研究が始まった．そして19世紀の終りまでには，閉曲面の分類は，向きづけが可能か否か，および示性数（向きづけ可能な曲面で言えば‘穴’の数，たとえばドーナツの表面なら1）で完全に分類できることが知られていた．リーマン自身，すでに n 次元多様体にこの方向の研究を拡張する計画を持っていたらしい．しかし，それは機が熟さぬままのノートで終った．リーマンの考えはベッチに影響を与えたらしく，ベッチは，高次元の多様体を線分や面に沿って簡単な多様体に切り開くことを論じ，その切開に必要な線分や面の個数を用いて，多様体の連結度なる概念を定義している．

ポアンカレは1895年の大論文，および，その後約10年の間に書かれた5つの補遺の中で，(自らの誤りを順次訂正しつつ) 代数的トポロジーの大綱を確立している．彼は，ベッチの連結度を**ベッチ数**の形に精密化し，また重要な**基本群**の概念や，ネジレ係数の概念も定式化した等々…….

たぶん，これらの研究を通して，2次元の閉曲面についての簡明な結果を3次元閉多様体に拡張することが容易でないことをポアンカレは知っていたと思う．向きづけ可能な閉曲面はベッチ数だけで分類することができたのであるが，しかし，3次元多様体を分類することは，ベッチ数とネジレ係数を用いてもできない．実際，ベッチ数も，ネジレ係数も，ともに0であるのに，3次元球面とは異なる3次元閉多様体が存在する．ポアンカレは，そのような空間の例を，第5の補遺（1904）の中で構成して見せた．今日，**ポアンカレのホモロジー球面**とよばれるものがそれである．ポアンカレのホモロジー球面は球面ではなく，その基本群

は自明でない．基本群が自明であるような空間を**単連結**と言うことにすると，3次元球面は単連結であるが，ポアンカレの例は単連結ではないのである．

ポアンカレは，この例を構成した第5の補遺の最後に次のような問題を提出した：

‘では，単連結な3次元閉多様体は3次元球面といえるのだろうか’．

これが今日に至るも未解決な，3次元ポアンカレ予想と呼ばれる難問である．

●不思議なことに高次元では……

高次元の空間とは，5次元以上の空間のことである．不思議なことに，高次元の閉多様体に関しては，この予想に対応する予想が既に完全に解決されているのである．

よく知られているように，われわれの通常眼にする球面（ボールの表面）は，2次元球面（記号 S^2）であり，

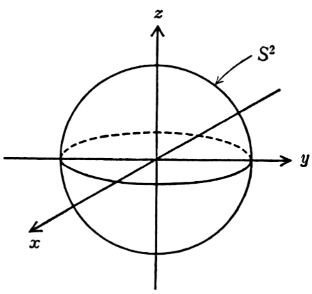


図1

3次元の (x, y, z) 空間の中の方程式

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad (r>0)$$

を用いて定義される（図1）．

これと同様に，一般に ***n* 次元球面**（記号 S^n）は，$n+1$ 次元の $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 空間の中で，同様の方程式

$$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{n+1}{}^2=r^2 \qquad (r>0)$$

によって定義される n 次元閉多様体である．

n 次元球面については，前節に述べたそのままの形では，ポアンカレ予想は成立しない．すなわち $n \geqq 4$ の場合には，単連結であっても，n 次元球面でないような n 次元閉多様体がいくらでも存在するのである．それらは，その空間に付随して定まる**ホモロジー群**とよばれる群（複数）が，n 次元球面に付随するホモロジー群と異なる構造をしていることによって，n 次元球面 S^n から区別される．そこで，一般の n 次元においては，ポアンカレ予想を次のように修正しなくてはならない．

‘単連結であって，かつ *n* 次元球面 S^n と同一のホモロジー群を持つ *n* 次元閉多様体は，*n* 次元球面と言えるだろうか’．

そのような n 次元閉多様体を**ホモトピー *n* 球面**とよぶが，要するに

'**ホモトピー n 球面は n 次元球面 S^n か**'

というのが，n 次元におけるポアンカレ予想である．この形でのポアンカレ予想は，$n=3$ の場合には本来のポアンカレ予想と実質的内容は同じである．

基本群もホモロジーの概念も，ともにポアンカレがその基礎を築いたものである．したがってポアンカレ自身が一般次元（n 次元）のポアンカレ予想を提出していたとしてもおかしくはない．しかし，彼はそうしなかった．閉曲面（2 次元多様体）の位相的性質が明らかになったあと，彼が次に詳しく研究すべき対象として 3 次元多様体を選んだのは，たぶん自然であったろう．常識的にも，2 次元の次は 3 次元，それからより高い次元へと研究を進めるのが自然な順序に思われる．

ところが，1961 年スメール（S. Smale）によって高次元（5 次元以上）のポアンカレ予想は，本来の 3 次元ポアンカレ予想に先立って解決されてしまった．数学は常識通りには進歩しないものである．

よく言われるように，1950～60 年代はトポロジーの飛躍的な発展期であった．前述のスメールの定理をその中に含みつつ，高次元多様体に関するぼう大な結果が論文の洪水となって溢れ出た時期である．当時のトポロジストの主要な関心は高次元多様体に向けられていたのだった．では，なぜ，'高次元' だったのだろう．それは，'高次元の方が低次元（3, 4 次元）の多様体より魅力的だ' というような感覚的理由ではなく，高次元多様体の方が低次元多様体より理論的に扱いやすいという（逆説的で驚くべき）事態がいろいろな数学者によって明らかにされたからである．次節でこのことを説明するが，その前にスメールの定理を見ておこう．

'n 次元ホモトピー球面は，$n\geqq 5$ のとき，n 次元球面と**位相同形**である'．これが彼の定理である．

位相同形の定義を述べておく．

空間 X から空間 Y への連続写像 $f: X \longrightarrow Y$ が**同相写像**であるとは，① f は 1 対 1 かつ上への写像であり ② f も f の逆写像 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ も，ともに連続である，という 2 条件が満たされることを言う．そして，X から Y への，このような同相写像が存在するとき，X と Y は**位相同形**である，と定義するのである．要するに '連続の幾何学' の立場から見て，X と Y は '同じ形' をしているということである．たとえば三角形や四角形（のタイル）は円板と位相同形である．しかし，円板から同心円板をくり抜いたドーナツ盤のような図形は円板と位相同形ではない．

●'ホイットニーの手品' とその限界

ここで，高次元多様体が低次元多様体より扱いやすい理由を説明しなければならない．ひとことで要約すれば，ホイットニーの手品（Whitney's trick）とよばれる交点の解消方法が高次元では使えるが，低次元では使えないというのが，その理由である．

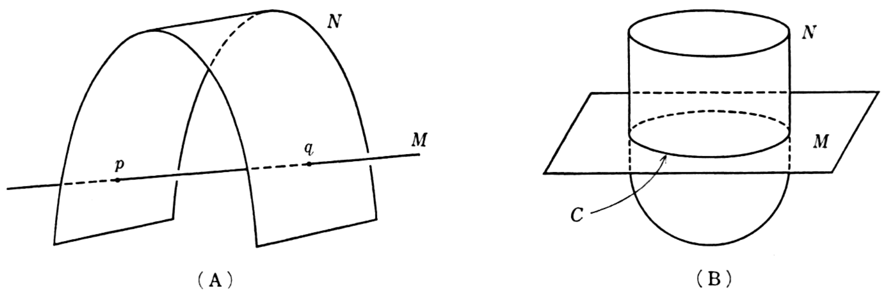


図2

図2(A)を見ていただきたい．ここには曲面N(2次元多様体)と曲線M(1次元多様体)が2点p, qで交わっている様子が描かれている．図2(B)では，2つの曲面N, M(ともに2次元多様体)が曲線C(1次元)に沿って交わっている．

これらの'交わり'は我々の住んでいる3次元の空間の内部で生じている．いま，'次元'の記号としてdimを採用するとき，次の関係に注目しよう．

$$\dim M+\dim N-\dim(\text{我々の空間})$$
$$=\dim(\text{交わるところ})$$

つまり図2(A)の場合，この式は$1+2-3=0$となる．(点は0次元である．)また図2(B)の場合は$2+2-3=1$となるわけである．

このような次元の関係式は，実は一般にすべての次元において成立する．つまり2つの多様体$M(\dim=m)$と$N(\dim=n)$が，大きな多様体$V$$(\dim=v)$の内部で交わるとき，その交わり$C$の次元は(最も'普通の'交わり方の場合には)

$$\dim C = m+n-v$$

で与えられるのである．

図2(B)のように，普通，2つの曲面M, Nが曲線(1次元)に沿って交わるのは，我々の空間が3次元だからであって，4次元の空間の中では，普通(と言う意味は，特殊な交わり方を別にすれば)2つの曲面M, Nは**点**において交わるのである$(2+2-4=0)$．したがって，4次元空間の中で2つの曲面が**点**において交わる様子を無理に絵に描こうと思えば，図2(B)よりむしろ図2(A)のようになるだろう．ここでは無理に(あるいは'心眼'を用いて)MもNも**曲面**であると思い，それが4次元空間の中で，2点p, qで交わっている様子であると考えていただきたい．

より高次元でも同様である．$v=m+n$の場合には，m次元多様体Mとn次元多様体Nは，v次元の多様体Vの中で図2(A)のようにいくつかの**点**で交わるのである．

さて，そのとき，MとNが2点p, qで**反対向きに**交わっている場合を考えよう．つまり，まさに図2(A)のように，一方の交点，たとえばpにおいて，Mが'Nの**表側から裏側へ**'抜けていれば，反対に他方の交点qでは，Mは'**裏側から表側へ**'抜け出ていると仮定する．

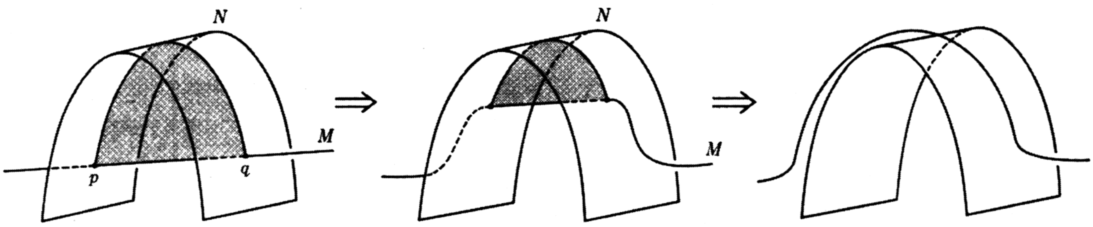


図 3

(この表現は，やや直感的に過ぎるかも知れないが許していただきたい.) さらに，次のことを仮定する．すなわち，図 3 の左端の影で示されたような半月形の板（トポロジーの立場から言えば，円板と位相同形な板）がうまく見つけられたとする．すると，この板に沿って，一方の多様体 M を滑らせていき，遂には，交点 p, q を 2 つとも同時に無くしてしまうことができる．(図 3 の左端から右端への変化.) この操作が，交点を解消するための‘ホイットニーの手品’とよばれる方法である．

図 3 の影で示された板をホイットニーの円板という．ホイットニーの円板が見つかりさえすれば，‘ホイットニーの手品’によって交点の解消ができるのである．

多様体 M と N が，図 3 の左端で示されたような単純な交わり方をしている場合には，ホイットニーの円板はすぐに構成できる．一般の場合には，交わり方は複雑であり円板探しも容易ではない．

しかし，ここにこそ高次元に移行する理由がある．たとえば $\dim M = \dim N = 3, \dim V = 6$ の場合を考えてみよう．ホイットニーの円板の周囲となるべき円周（p, q を両端とする M 上の線分と N 上の線分を合わせたもの）は比較的容易に見つかる．問題は，この円周を周囲とする円板（＝半月形の板）が，M と N にその周囲以外では交わらないようにとれるか，またその円板が自分自身と交わるようなことがないか，ということである．

今の場合 ($\dim M = \dim N = 3, \dim V = 6$)，両方とも答は肯定的である．すなわち，円板は 2 次元であるから，6 次元の中で，3 次元の M との交わりの次元は，先ほどの公式を使うと，

$$\dim(\text{円板}) + \dim M - \dim V = 2 + 3 - 6 < 0$$

となり，これは，円板を少しうごかせば，円板と M とが周囲以外で交わらないようにできることを意味する（ということが証明できる)．同様にこの円板は N ともその周囲以外では交わらない．さらに，円板の自分自身との交わりにも先ほどの公式が使えて，

$$\dim(\text{円板}) + \dim(\text{円板}) - \dim V = 2 + 2 - 6 < 0$$

よって，自分自身と交わらないようにとれる．こうして，6 次元 (以上) の場合には必要に応じてホイットニーの円板が見出せる．5 次元になると事情は少し複雑になるが，ホイットニーの手品は，依然有効である．

しかし，4 次元では，上の議論は完全に破綻する．$\dim V = 4$ の場合，

$$\dim(\text{円板})+\dim(\text{円板})-\dim V = 2+2-4 = 0$$

であるから，円板は一般に自分自身と何個かの点において交わってしまう．交点を解消すべくホイットニーの円板を見出そうとしても，その円板が自分自身と交わってしまうので，いわば‘使いものにならない’のである．4次元多様体の本質的な難しさがここにあった．

●キャッソン氏の新見地

スメールによる5次元以上の証明をそのまま4次元に適用しようとすると，上述のようにホイットニーの手品が破綻しているという困難に出会う．多くのトポロジストがここでつまずいていた．4次元では，‘ホイットニーの手品’とは全然別の方法によって交点が解消されるのか，それとも，そのような交点の解消は，4次元においては，どんな方法によっても原理的に不可能なのだろうか．

1973年ごろ，キャッソン（A. Casson）という数学者が，このような堂々めぐりの議論にとらわれない新しい角度からの考察を始めた．彼は，4次元における交点を解消しようとしたり，あるいは，交点を解消する際の障害を詳しく分析したり，そういう行き方はとらなかった．むしろ，4次元の中で交点が生じてしまうなら，それを4次元多様体の本性からの自然な要請として受け入れるという立場をとった（ように見える）．交点の数を減らそうと努力するかわりに，逆に，‘4次元の本性上’生ずる交点は，いくらでも増やしてしまうことを考えてみたのである．

たとえば，図4(A)を見ていただきたい．ここには，4次元の中で，自分自身と1点pで交わる円板$\varDelta_1$がある．（交わりの次元公式から，4次元の中での2次元円板の自己交差の次元は0であったことを思い出していただきたい．）もし，pを通る$\varDelta_1$上のループ（閉曲線）が，$\varDelta_1$の外側で自己交差をもつ円板$\varDelta_2$を張るなら，これを$\varDelta_1$にくっつけてしまう（図4(B)）．キャッソンは，$\varDelta_1$をうまくとりさえすれば，このような$\varDelta_2$が必ず存在することを証明した．そして，この操作は$\varDelta_2$についても同様にくり返すことができる．すなわち$\varDelta_2$上のループで$\varDelta_2$の自己交差を通るものが$\varDelta_1$と$\varDelta_2$の外側で自己交差をもつ円板$\varDelta_3$を張るようにできる．$\varDelta_2$に複数の自己交差があれば，その個数だけ円板をとって，$\varDelta_2$にはりつけてしまう．$\varDelta_3$についても同様に進む．こうして，自己交差をもつ円板の無限の系列が構成され，それらは，次々と前段階の円板（自己交差のある）にくっついている（図5）．

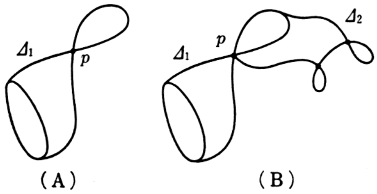


図4

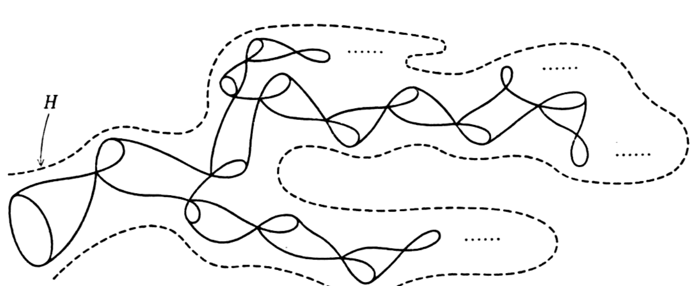


図5

そしてキャッソンは，この無限個の円板から成る‘塔’全体の，うまい近傍 H を考えたのである．この近傍 H は図5の破線で示されている．通常，H を**キャッソンのハンドル**とよぶ．彼の証明した定理によれば，キャッソンのハンドルは，通常のよくわかったハンドル $D^2\times\boldsymbol{R}^2$（＝2次元単位円板と2次元平面の直積）と同一の‘固有ホモトピー型’を持ち，したがって基本群によっても，ホモロジー群によっても H と $D^2\times\boldsymbol{R}^2$ は区別ができない．H は，自己交差を持つ無限個の円板から上のように構成されたもので，その幾何学的な形はまったくわけのわからないものである．それにもかかわらず，H と $D^2\times\boldsymbol{R}^2$ は，代数的トポロジーの手段では区別できないというのであるから，$H=D^2\times\boldsymbol{R}^2$ である可能性も（信じ難いことだが）無いわけではなかった．

●フリードマンの定理

1977年1月のある寒い朝，プリンストンの研究所を訪れたキャッソンは次のような趣旨の講演を行なった．

‘もし $H=D^2\times\boldsymbol{R}^2$ であれば，ホイットニーの円板のかわりに H を用いて“ホイットニーの手品”が実行でき，したがって4次元ポアンカレ予想をはじめ，4次元多様体に関する多くの問題が解決できる’．

講演を前にして，‘こんなことは既に知られているのかなあ’などと周囲の人に尋ねたりして，キャッソン氏自身は少し気弱そうに見えた．

今回のフリードマンによる4次元ポアンカレ予想の解決は，このキャッソンの路線に乗ったものである．

フリードマンの定理を述べる前に，‘$H=D^2\times\boldsymbol{R}^2$ か？’という問題は，実は，二様の意味に解釈できることを注意しておきたい．いま，2つの滑らかな多様体 M_1, M_2 があって，それらが位相同形であるとする．位相同形の定義により，同相写像 $f: M_1\longrightarrow M_2$ が存在する．

ところで，f がさらに次の条件を満たすとしよう．すなわち，f も，f の逆写像 f^{-1} も，ともに（連続であるばかりでなく）微分可能でもある，という条件である．

このとき，f は**微分同相写像**とよばれ，M_1 と，M_2 は**微分位相同形**であるといわれる．M_1 と M_2 が微分位相同形なら，もちろん両者は位相同形なのであるが，この逆はなりたたない．位相同形ではあるが微分位相同形にならない，滑らかな2つの多様体 M_1, M_2 が存在するのである！　このような多様体の最初の例はミルナー（J. Milnor）によって1956年に与えられた．彼は S^7 と位相同形でありながら S^7 と微分位相同形にならない7次元閉多様体 M^7（エキゾチックな球面）を構成してみせた．M^7 は明らかにホモトピー7球面である．しかるに，M^7 は7次元球面 S^7 ではない．

もう一度，スメールの定理を見直そう．彼の定理は，‘ホモトピー n 球面は，$n\geqq 5$ のとき，n 次元球面 S^n と位相同形である’と述べているのであって，n 次元球面 S^n と**微分**位相同形であるとは主張していない．したがって，‘ホモトピー n 球面は n 次元球面か’という一般化

されたポアンカレ予想には，二様の意味があり，それに応じて二様の答があったのである．

'n次元球面か'というところを'n次元球面S^nと**位相同形か？**'という意味に解釈すれば，$n \geqq 5$の範囲で肯定的である（スメール）．ところが'n次元球面S^nと**微分位相同形か？**'という意味に解釈すれば，$n \geqq 7$において反例がある（ミルナー）．

われわれに関心あるキャッソンのハンドルHの場合にも，'$H=D^2 \times \boldsymbol{R}^2$か？'という問題は，上のような2つの解釈を許す．フリードマンは次の定理（驚くべき定理）を証明したのであった．

フリードマンの定理（1981）：**どんなキャッソン・ハンドルHも$D^2 \times \boldsymbol{R}^2$と位相同形である．**

この証明の詳細は，とてもここでは述べられないが，現在テキサスにいるビング（Bing）流の野性的トポロジーの強い影響を見逃すことはできない．

フリードマンの定理と，前述のキャッソンの講演とを組みあわせると，4次元多様体に関するさまざまの問題が，**位相同形**の範囲内で完全に解決できる．そのひとつの系が4次元ポアンカレ予想の**位相的**解決だったわけである．

定理（フリードマン）**ホモトピー4球面は4次元球面S^4に位相同形である．**

●おわりに

フリードマンの定理は，二様の解釈の一方のみ答えていることに注意しょう．彼の定理は，ホモトピー4球面は4次元球面S^4に**微分**位相同形かという問題については何も教えてくれない．キャッソン・ハンドルが$D^2 \times \boldsymbol{R}^2$に**微分**位相同形か，ということもわからない*)．要するに，4次元のエキゾチック球面が存在するか否か，は現在未解決なのである．

本来の3次元ポアンカレ予想もサーストン（W. Thurston）を中心とする多くの人達の努力にもかかわらず依然として未解決である．

次のことを注意して終りにしよう．3次元，4次元，高次元（5次元以上）と，次元を3つの範囲に分けてみると，その各々の間で，多様体の'質'にかなりの差がある，ということである．これはとても興味深いことに思われる．

参考文献

(1)　加藤十吉「ポアンカレ予想の周辺」日本数学会編雑誌『数学』第31巻，289頁—316頁，岩波書店，1979年．

(2)　本間龍雄『ポアンカレ予想物語』数セミ・ブックス，日本評論社，1985年．

（『数学セミナー』1982年7月号）

*)　キャッソン・ハンドルは$D^2 \times \boldsymbol{R}^2$に微分位相同形で**ない**ことが1985年ドナルドソン（S. K. Donaldson）により証明された．

●付録 2

R^4 上のエキゾチックな微分構造

フリードマン（M. Freedman）により 4 次元ポアンカレ予想が解決されたのは 1981 年のことであった．それに続いて，1982 年に，さらにもうひとつの驚くべき発見が 4 次元多様体のトポロジーにおいてなしとげられた．それは，4 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ 上に，通常の微分構造とは異なる微分構造が存在するという発見である．4 次元以外のユークリッド空間は，通常の微分構造以外の微分構造を持ち得ないことはすでにわかっているから，このことは 4 次元多様体のトポロジーの‘異常さ’を端的に物語るものといえよう．$\boldsymbol{R}^4$ 上に異種の（エキゾチックな）微分構造が存在する，という認識は，4 次元多様体に関する，ある基本定理から得られる．この基本定理は，ドナルドソン（S. Donaldson）という，フリードマンよりさらに若い数学者により証明されたものである．

以下，彼の基本定理の解説を試みよう．

1. 高次元トポロジーと低次元多様体

今では，やや古い話になってしまったが，ミルナー（J. Milnor）が 7 次元球面上に，通常の微分構造とは別のいわゆるエキゾチックな微分構造の存在を示して，世間をアッといわせたのは，1956 年のことである．それ以来，微分トポロジーとよばれる分野は，目覚ましい発展を遂げ，たとえば，5 次元以上の球面上に何個のエキゾチックな微分構造があるか，というようなことは，少くとも原理的には完全に明らかにされた．球面ばかりでなく，一般の高次元多様体についても，その上の微分構造なり，PL 構造（三角形分割の構造）なりを統制する理論もほぼ完全に仕上がっている．

このような高次元多様体の微分トポロジーを通じて明らかになったのは，高次元多様体の微分構造や PL 構造は，その多様体の接バンドルにより把握される，という事実であった．よく知られているように，多様体の接バンドルは，その多様体から然るべき‘分類空間’とよばれる空間への，ある写像のホモトピー類により分類できる．したがって，多様体のトポロジーは，ある種の空間とその空間の間の写像のホモトピー論的な研究に帰着される，と考えてよかろう．これを標語的に言えば，‘多様体論はホモトピー論に還元される’，あるいは（こ

の言い方が少々言いすぎならば）‘多様体のトポロジーはホモトピー論的な情報によって把握可能である’とでもなるだろうか．これが，高次元多様体論の基本的認識ではなかったかと思う．

過去十数年の間（あるいは，もっと永い間かも知れないが），上述のような高次元多様体論の基本認識が，3 次元 4 次元の，いわゆる低次元多様体論においてもそのまま成り立つものかどうか，それを確かめるべく多くの努力が傾けられてきた．はじめに述べたフリードマンの仕事（1981）とドナルドソンの基本定理（1982）は，この問題に重要な鍵を与えるものであった．それによれば，この問はある場合には正しく，ある場合には誤っている．

フリードマンの定理は，一種の肯定的解答と考えられる．彼の定理によれば，上述の高次元多様体論の‘基本的認識’は 4 次元単連結**位相**多様体については成り立つ：

フリードマンの定理（存在定理）　整数環 $\boldsymbol{Z}$ 上で定義された任意の非特異（unimodular）双一次形式について，それを交点形式とする単連結の閉じた 4 次元位相多様体が存在する．

（一意性定理）（i）単連結の閉じた 4 次元位相多様体 M の交点形式が II 型（すなわち対角成分がすべて偶数）ならば，M と同値な交点形式をもつ 4 次元単連結閉位相移様体は M と位相同形であり，（ii）もし M の交点形式が I 型（すなわち II 型でない）ならば，M と同値な交点形式をもつ 4 次元単連結閉位相多様体の位相同形類はちょうど 2 つある．

4 次元球面 S^4 は自明な交点形式をもつから，4 次元ポアンカレ予想はこの定理の特別な場合である．

この定理にいう 2 つの位相同形類は，Kirby-Siebenmann 類とよばれるコホモロジー類 $k(M) \in H^4(M;\boldsymbol{Z}_2)$ で決定される．

M の交点形式は，Mのホモトピー形で定まり，Kirby-Siebenmann 類 $k(M)$ は，M の（位相的）接バンドルによって定まる．したがって，上の定理は，高次元多様体論の基本的認識が，4 次元**位相**多様体についてもそのままの形で有効であることを示している．単なる位相多様体（微分構造や PL 構造を考えない位相多様体）の，位相同形による分類に話を限るならば，である．

2.　ドナルドソンの基本定理

ところが，4 次元多様体の微分構造を問題にするや否や，事情は一変する．以下に述べるドナルドソンの基本定理，およびその系として得られる $\boldsymbol{R}^4$ 上のエキゾチックな微分構造の存在によって，高次元微分トポロジーの夢は，4 次元の滑らかな多様体については残念ながら，そのままの形では成り立たないことがわかる．

実際，$\boldsymbol{R}^4$ のホモトピー形は，1 点のホモトピー形と同じく自明であり，その接バンドルも自明である．$\boldsymbol{R}^4$ に 2 種類以上の微分構造が存在するとしたら，ホモトピー論的な情報でそれらを区別するのは不可能であろう．

ホモトピー論に還元できない何ものかが，4次元の微分トポロジーにはある．こうして高次元と同様の理論を4次元に期待する夢想はついえ去った．しかし，同時に高次元とは別種の‘4次元トポロジー’の誕生が告げられたとも考えられよう．

ドナルドソンの基本定理は，単連結で閉じた，滑らかな4次元多様体 M^4 の交点形式に関するものである．交点形式は，フリードマンの定理の主張にも出てきたものであり，話が多少前後するが，ここで簡単に復習しておこう．

M^4の整係数2次元ホモロジー群 $H_2(M^4;\boldsymbol{Z})$ を考える．ここで $H_2(M^4;\boldsymbol{Z})$ の定義まで遡ることはさしひかえるが，要するに M^4 の中の‘2次元サイクル’全体を‘ホモローグ’なる同値関係で類別して得られる可換群である．‘2次元サイクル’とは，M^4 の中の向きづけられた閉曲面のようなものと思っておけば，まず間違いない．

$H_2(M^4;\boldsymbol{Z})$ の2元 x と y が，M^4 の中の2次元サイクル C_1, C_2 で，それぞれ表わされているとする．C_1, C_2 を一般の位置で交わらせる．今の場合，交わりは有限個の点になる（図1）．

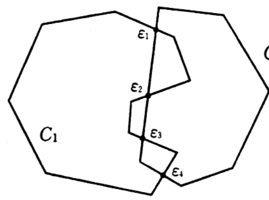


図1

各々の交点 p_t のところで，その交わりが‘正の交わり’か‘負の交わり’かが区別され，交点 p_i の符号 ε_i $(=\pm 1)$ が決まる．C_1 と C_2 の交点全体にわたって ε_i を加え合わせたもの $\sum_i \varepsilon_i$ は，C_1 と C_2 の交点数とよばれる整数であり，$C_1 \cdot C_2$ などの記号で表わされる．$C_1 \cdot C_2$ の値は C_1, C_2 が代表しているホモロジー類 x, y によって定まり，したがって x と y の交点数 $x \cdot y$ が意味をもつ $(x \cdot y = C_1 \cdot C_2)$．対 (x, y) に整数 $x \cdot y \in \boldsymbol{Z}$ を対応させる写像は，x, y の各々について線型であり，こうして双一次形式

$$H_2(M;\boldsymbol{Z}) \times H_2(M;\boldsymbol{Z}) \longrightarrow \boldsymbol{Z}, \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y$$

が定義される．ポアンカレの双対定理により，これは非特異な双一次形式である．これが M^4 の**交点形式**に他ならない．

4次元多様体論の最も根本的な問題は次のようなものである．

問題　どんな非特異双一次形式が，4次元閉多様体の交点形式として実現されるか．

先に述べたフリードマンの定理によれば，単連結な4次元**位相**多様体により実現される非特異双一次形式には何の制限もない．どんな非特異双一次形式も単連結**位相**多様体によって実現できる．

ところが，**滑らかな**多様体の交点形式に関して次のような制約が知られていた．これは，

ロホリン（Rochlin）の定理（1952）と呼ばれ，ドナルドソンの定理（1982）が出るまでに知られていた，交点形式に関する唯一の制約である．

ロホリンの定理　単連結で**滑らかな**閉じた 4 次元多様体 M^4 の交点形式が II 型であれば，その符号数は 16 で割り切れる．

ここで言う**符号数**とは交点形式を表わす行列（それは対称行列）を実数上対角化したとき，正の対角成分の個数から負の対角成分の個数を引いて得られる数のことである．

たとえば次の行列 E_8 で与えられる双一次形式は II 型であるが，その符号数が 8 であるので，ロホリンの定理により，滑らかで閉じた単連結 4 次元多様体の交点形式にはなり得ない．

$$E_8 = \begin{bmatrix} 2 & & & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix}\text{空白のと}\\ \text{ころは 0}\end{pmatrix}$$

それでは，E_8 を 2 つ対角的に並べた行列 $E_8 \oplus E_8$ はどうだろうか．この行列は II 型であり，かつ符号数は 16 であるから，もはやロホリンの定理にはひっかからない．$E_8 \oplus E_8$ を交点形式にもつ滑らかで閉じた単連結 4 次元多様体が存在するかどうかは，実に 30 年の間未解決の難問だった．ドナルドソンの基本定理は，この難問に否定的に答えたのである．

ドナルドソンの基本定理　滑らかな 4 次元単連結閉多様体の交点形式が正定値なら，それは単位行列で表わされる標準的双一次形式に同値である．

この定理を $E_8 \oplus E_8$ に適用してみよう．行列 $E_8 \oplus E_8$ はその階数（$=16$）と符号数（$=16$）が一致しているから，正定値である．ところが $E_8 \oplus E_8$ は単位行列に同値にならない．これは，$E_8 \oplus E_8$ を交点形式に持つ滑らかな 4 次元閉多様体（単連結）が存在しないことを意味している．

3. $\boldsymbol{R}^4$ 上のエキゾチックな微分構造

ドナルドソンの定理から，どのようにして $\boldsymbol{R}^4$ 上のエキゾチックな微分構造が導かれるのだろうか．

次の定義はよく知られている．二つの滑らかな多様体 V と W の間の写像 $f: V \longrightarrow W$ が，V の局所座標系に関して何回でも微分可能なとき，f は滑らかな写像であるといわれる．また，V と W の間の同相写像 $h: V \longrightarrow W$ があって，h も h^{-1} もともに滑らかな写像であれば，h は**微分同相写像**とよばれる．そのとき V と W とは**微分同相**であるという．

さて，$\boldsymbol{R}^4$ には，4次元数空間としての標準的座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) がある．$\boldsymbol{R}^4$ 上の関数 f が微分可能かどうかは，通常，この座標に関連して決められる．座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) により定まる $\boldsymbol{R}^4$ の微分構造が，'通常の微分構造' である．

$\boldsymbol{R}^4$ 上にエキゾチックな微分構造が存在する という主張は，次の主張と同値である：

主張　ある滑らかな4次元多様体 V^4 があって，V^4 は $\boldsymbol{R}^4$ と位相同形であるが，通常の微分構造の入った $\boldsymbol{R}^4$ とは，決して微分同相にならない．

V^4 の構成は，有名な $K3$ 曲面 M^4 から出発する．M^4 は滑らかな単連結4次元閉多様体であって，M^4 の向きを通常の（複素座標から決まる）向きと反対にとると，その交点形式は

$$E_8 \oplus E_8 \oplus U \oplus U \oplus U, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

という形になる．U は，2つの球面の直積 $S^2 \times S^2$ の交点形式と同値である．

ここに，キャッソン（A. Casson）による無限回構成法を適用すると，M^4 の中に，互いに交わらない3つの開集合 O_1, O_2, O_3 が構成され，次の性質（∗）をもつようにできる（キャッソンの方法については付録1"4次元ポアンカレ予想の解決"参照）．

性質（∗）　各々の O_i の固有ホモトピー形は $S^2 \times S^2 - \{1\text{点}\}$ と同じであり，しかも，M^4 の交点形式をこれら3つの開集合 O_1, O_2, O_3 に制限して見たものが，$E_8 \oplus E_8 \oplus U \oplus U \oplus U$ の中の3つの $U \oplus U \oplus U$ にちょうどなっている．

フリードマンは，4次元ポアンカレ予想の証明に成功する以前，キャッソン構成からできる開集合のもつ著しい性質に気がついた．上の開集合 O_1, O_2, O_3 にそくしてそれを述べると次のようになる．

定理　O_i をうまく構成すると，O_i は，球面の直積 $S^2 \times S^2$ の中に滑らかに埋め込めるとしてよい．しかも各々の O_i の中には，あるコンパクト集合 F_i があって，O_i をこの埋め込みで $S^2 \times S^2$ の部分集合とみなし，F_i も $F_i \subset S^2 \times S^2$ と考えるとき次の(i)，(ii)が成り立つ．

(i)　$H_2(F_i\,;\boldsymbol{Z}) \longrightarrow H_2(S^2 \times S^2\,;\boldsymbol{Z})$ は同型である．

(ii)　$S^2 \times S^2 - F_i = V_i^4$ は $\boldsymbol{R}^4$ と固有ホモトピー形が同じである（図2）．

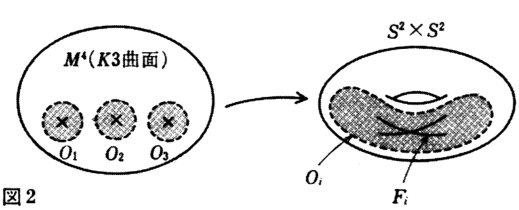


図2

フリードマンは，4次元ポアンカレ予想を証明すると同時に，次の定理をも証明した．

定理　$\boldsymbol{R}^4$ と固有ホモトピー形が同じであるような 4 次元位相多様体は $\boldsymbol{R}^4$ と位相同形である.

さて, $V_i^4=S^2\times S^2-F_i$ とおいて得られる 4 次元多様体は, $S^2\times S^2$ の開集合であるから, 自然に微分構造が入る. この'自然な'微分構造を伴う V_1^4, V_2^4, V_3^4 のうち少くともひとつがエキゾチックな $\boldsymbol{R}^4$ なのである. 各々の V_i^4 が $\boldsymbol{R}^4$ と位相同形なことは上に述べたフリードマンの結果で保証されている. V_1^4, V_2^4, V_3^4 のどれもが $\boldsymbol{R}^4$ と微分同相になる, ということはない. これを示そう. 矛盾を出すため, V_i^4 が $\boldsymbol{R}^4$ と微分同相であると仮定しよう. $\boldsymbol{R}^4$ の中には, もちろん, いくらでも大きな滑らかな 3 次元球面 S_r^3 (半径 r) が存在する. V_i^4 と $\boldsymbol{R}^4$ が微分同相なら, V_i^4 の中にも, 'いくらでも大きな'滑らかな 3 次元球面がなくてはならない.

もともと, $V_i^4=S^2\times S^2-F_i$ であった. したがって, V_i^4 の中の, 十分大きな 3 次元球面を $S^2\times S^2$ の中に埋め込まれたものと考えると, コンパクト集合 F_i に十分近いはずである. とくにそれは, O_i の中にとれ, F_i をつつみ込むような位置にある (図 3).

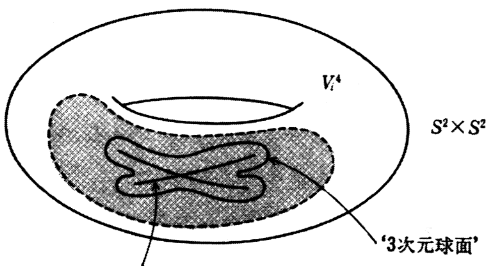


図 3

そこで再び O_i を $K3$ 曲面の中の開集合と考えると, 図 2 の $K3$ 曲面の 3 つの'バツ印'を囲むように, 滑らかな 3 次元球面がとれる. この'バツ印'は, 交点形式 U に対応する 2 次元ホモロジーの台になっていた (図 2 の前に述べた定理の(i)). よって, その 3 次元球面の内側を $K3$ 曲面からとり除いて, 4 次元円板 D^4 でふたをすると, 滑らかな 4 次元連結閉多様体 M' が得られ, その交点形式は $E_8\oplus E_8\oplus U\oplus U\oplus U$ から 3 つの U をとり除いたもの, すなわち, $E_8\oplus E_8$ となる. これはドナルドソンの基本定理に矛盾する. したがって, V_1^4, V_2^4, V_3^4 のどれか少くともひとつは, $\boldsymbol{R}^4$ と微分同相ではない!

4. ヤン-ミルズ場の登場

ドナルドソンの定理は, 4 次元多様体論にとって, 基本的な重要性をもつものであるが, その証明もまた驚くべきものである.

証明には, 素粒子論に現われるヤン-ミルズ場 (Yang-Mills 場) の理論が使われるのである. この理論のわかりやすい解説は, だれか別の方にお願いしたいところだが, 要するに,

与えられた多様体 M 上でヤン-ミルズ方程式を考え，その解全体のつくる空間をゲージ同値で割った空間 N を考える．N は実は 5 次元の（特異点をもつ）多様体になり，しかも M^4 は N の‘境界’と考えられるというのである．N^5 の特異点の様子は，よくわかるものであって，それを利用して M^4 の位相的性質が調べられる．

4 次元多様体論に物理学的な理論が使われたのは，あるいは単なる形式上の類似だけなのかも知れないが，しかし，なかなか意味深長で夢をかきたてる事件ではある．

はじめの方で，高次元的なトポロジーの手法が 4 次元では行詰っていると述べた．‘新しい 4 次元トポロジー’のありようがあるいはこの‘事件’によって象徴されているのかも知れない．

（『数学セミナー』1983 年 5 月号）

追記：タウベスによって $\boldsymbol{R}^4$ 上のエキゾチックな微分構造は非可算個あることが証明された．

(C. H. Taubes, Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds, Journal of Diff. Geom. 25, 1986, 363-430)

●付録 3

トポロジーにおける高次元と低次元

はじめから思い出話になって恐縮ですが，学生時代にスメールの「h-コボルディズム定理」を勉強した時の奇妙な気持ちは，今でも割にはっきりと思い出します．スメールは高次元ポアンカレ予想を解決した有名なトポロジストで，h-コボルディズム定理はその解決に使われた手法を一般の単連結多様体（という一種の空間）に拡張して，ひとつの強力な定理として定式化したものです．その証明は，ミルナーによるプリンストン大学出版の講義録で 100 ページ以上もかかります．そんなに長い証明を要する定理を勉強したのはその時が初めてだったものですから，それだけでもかなりの驚きでしたが，定理の扱う多様体が 5 次元以上であるということも妙に気になりました．我々の住んでいる空間は，たて，よこ，高さの 3 方向を備えた 3 次元空間ですし，「時間方向」を加えたとしてもせいぜい 4 次元です．5 次元以上の空間を記述する h-コボルディズム定理のような定理は何かしら空疎な定理であるような気がしました．

しかし，馴れとは恐しいもので，5 次元以上の空間のトポロジーを勉強して行くうちに，空疎な感じも次第に薄らいでいって，いわゆる高次元空間についての実在感のようなものが何となく身について行きました．

我々が高次元のトポロジーを勉強していたのは 1960 年代です．そして，60 年代は高次元トポロジーの全盛期だったと思います．60 年代最後の年 1969 年には，カービーとジーベンマンによって，高次元位相多様体についての三角形分割問題と基本予想が一挙に解決されるまでに到りました．そのような高揚期のあとを承けた 70 年代と 80 年代は 4 次元以下の「低次元」空間の研究が盛んになった時期と言えそうです．スメールを初めとする多くのトポロジストが開発した高次元空間を攻撃する強力な理論によって，高次元（5 次元以上）のありようが明らかになったあとで，なぜこんなにも強力な理論が，4 次元以下の空間の研究には無力なのか，を誰しもが知りたいと思うようになったのだと思います．4 次元以下の空間には 5 次元以上の空間とは何か本質的に違う所があるのだろうか，それとも，スメール達の理論構成が悪いだけで，4 次元以下も 5 次元以上も，本当は大して違いはないのだろうか．

やや単純化して言えば，70 年代はこれらの疑問に答えるべく手探りの研究が続けられた模

索の時代，80 年代はドナルドソン理論とフリードマン理論の登場によって，高次元／低次元の断絶が明らかになった時代と言えます．もっとも，これは 4 次元トポロジーについての話で，もう 1 次元低い 3 次元トポロジーの世界では，既に 70 年代にサーストンによる爆発的発展がありました．

●まつわり数

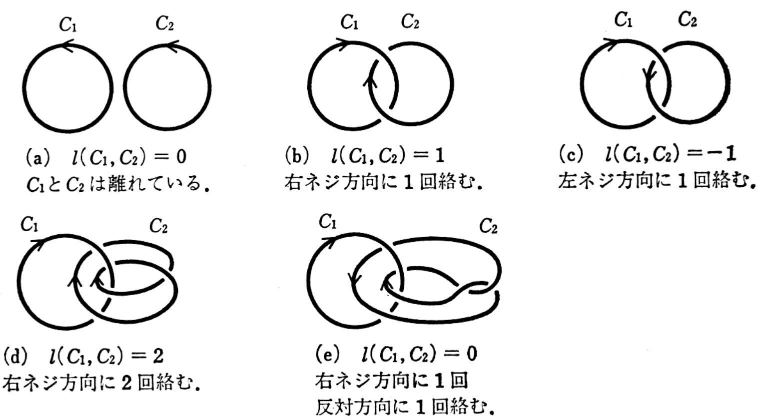
どんなに高級な理論もごく身近なところにその種（たね）があると思います．ここで言う「種」は「種明かし」のタネではなく，「その理論につながるささやかな現象」とでも言えるようなものです．高次元／低次元の断絶と，あとで述べるそれらの間の連続性，それから，最近話題のキャッソン不変量やジョーンズ多項式等の華々しい理論の「種」は何かと言うと，それは「まつわり数」であると信じています．これは，個人的な思い込みに近いものかも知れませんし，専門家からは異論が出るかも知れませんが，ともかくもまつわり数を軸にして以下の解説を続けてみたいと思います．

3 次元空間の中に 2 つの互いに交わらない閉曲線 C_1, C_2 があるとし，それぞれの閉曲線に向き（矢印）が与えられているとします．そうすると，それらの間の**まつわり数**（linking number）という整数が決ります．ここでは，C_1 と C_2 の間のまつわり数のことを

$$l(C_1, C_2)$$

という記号で表わすことにします．

まつわり数が大体どんなものかは，図 1 を見てください．



(a)　$l(C_1, C_2)=0$
C_1 と C_2 は離れている．

(b)　$l(C_1, C_2)=1$
右ネジ方向に 1 回絡む．

(c)　$l(C_1, C_2)=-1$
左ネジ方向に 1 回絡む．

(d)　$l(C_1, C_2)=2$
右ネジ方向に 2 回絡む．

(e)　$l(C_1, C_2)=0$
右ネジ方向に 1 回
反対方向に 1 回絡む．

図 1

要するに，まつわり数は 2 つの閉曲線が（右ネジ方向に）互いに何回絡んでいるかを表わす数で，反対に左ネジ方向に絡んでいればマイナスをつけて数え，右ネジ・左ネジの両方向があればその差を数えるわけです．この数はトポロジーばかりでなく，環状電流のつくる磁場の計算にも現われることを御存知の方もいらっしゃると思います．

さて，まつわり数は，その定義からしてじつは次元と深く関係しています．つまり，2つの閉曲線 C_1, C_2 のまつわり数は，それらの閉曲線が**3次元空間**内に置かれているからこそ定義できるものであって，たとえば，平面（2次元）上に互いに交わらない閉曲線を2つ描いた場合は，一方を他方に触れずにその平面から取り出せますから，まつわり数を定義したとしても0になってしまいます．また，4次元空間の中に2つの閉曲線がある場合も，その2つは絡まりません．次にそのことを説明しましょう．

● 4次元空間内の閉曲線たち

4次元空間は3次元空間にさらに別の1次元方向を加えたものです．図2の平面が3次元を表わしていると（無理にでも）思ってみてください．我々はこの一見平面に見える3次元空間の中に住んでいるものとします．この「平面」に直交する矢印の方向が4次元方向というわけです．さて，図2には円筒が描かれていますが，これを4次元空間内を動く閉曲線 C_1 の軌跡を描いたものだと想像しましょう．閉曲線 C_1 は3次元空間の「右側」から3次元空間に近づき，それと一瞬交わったあとで「左側」の方へ通過して行きます．3次元空間内に住む「我々」には3次元空間の内部しか見えませんから，「我々」にはあたかもある瞬間に閉曲線 C_1 がパッと現われ，すぐにパッと消えたように見えるはずです．

もし，たまたま，パッと現われた C_1 にちょうど一回絡む位置に別の閉曲線 C_2 が（図3の

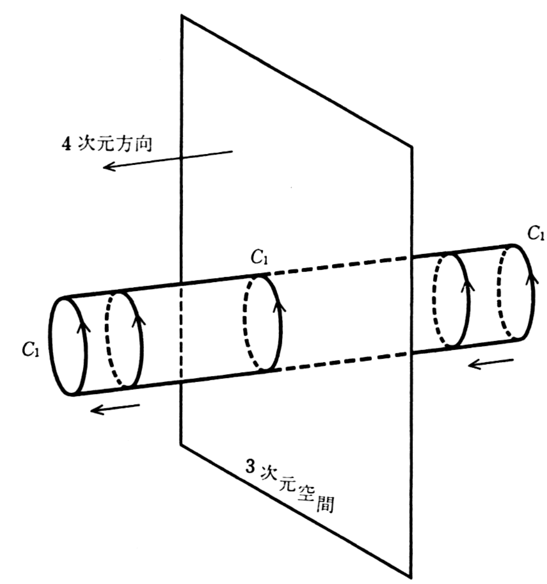


図2

ように）描かれていたらどうでしょうか．この時も別に何の違いもありません．閉曲線 C_1 はたんにパッと現われパッと消えるだけですから，別の閉曲線 C_2 があろうが無かろうが，そのことには無関係にただ現われて消えるだけです．しかし，このことを，図２のような４次元空間全体のパースペクティブの中で眺めますと，３次元空間内の図３のように絡まった閉曲線 C_1, C_2 の片方 C_1 を，他方の C_2 に触れずに４次元方向に取り出したことになる，ということがわかると思います．４次元の中で C_1 と C_2 がはずれてしまいました．このように，２つの閉曲線が互いに絡み合うのは，３次元空間に特有の現象です．４次元空間では，閉曲線が絡み合うということは無いわけです．

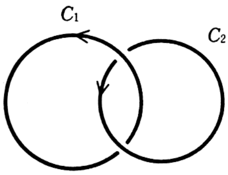
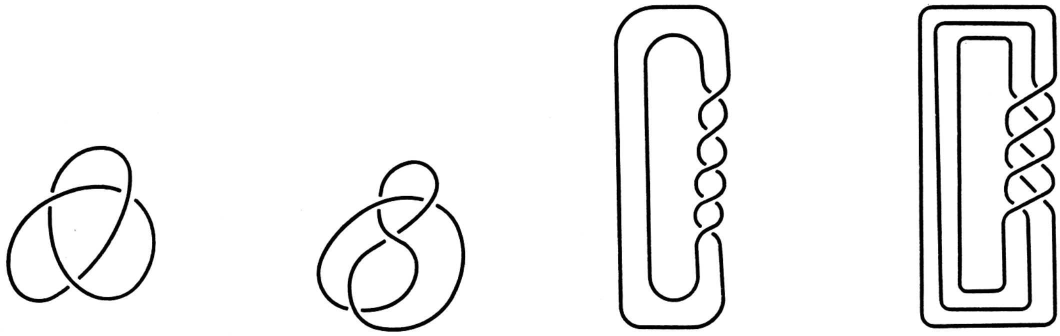


図３



(a)　三つ葉結び目　(b)　８の字結び目　(c)　(2,5)型のトーラスの結び目 $K_{2,5}$　(d)　(3,4)型のトーラス結び目 $K_{3,4}$

図４

３次元空間内に置かれたひとつの閉曲線（ただし，自分自身と交わらない）を**結び目**といいます．図４はいろいろな結び目の例です．図４で見るように，３次元空間内には千差万別の結び目が（無限に）存在しますが，４次元で「絡まり」がはずれたと同様に４次元空間内に置いた結び目は皆ほどけてしまいます．皆，輪ゴムのように，結ばれていない「自明な結び目」になってしまいます．閉曲線が「結ばれる」現象も３次元に特有で，４次元以上には存在しません．結び目のような面倒な現象が消えてしまうことが高次元のトポロジーを扱いやすくしている理由です．もっとも，高次元一歩手前の４次元には絡まりの現象の片鱗が少し残っています．それを図２の円筒の絵にもどって説明しますと，この円筒は閉曲線 C_1 の動いたあ

との軌跡を表わしていました．この軌跡に沿って C_1 を動かすことで，C_1 と別の閉曲線 C_2 の絡まりがはずれてしまったわけですが，閉曲線 C_2 は，この軌跡自身には絡んでいると考えられます．これが絡まりの現象の「片鱗」です．5次元以上になると，C_2 と軌跡との絡まりさえはずれてしまいます．

●結び目の不変量 $R(K)$

3次元空間では結び目はほどけないと言いましたが，次のようなインチキをすれば，ほどけます．それは，図5のように，自分自身を通過することを許して変形することです．このインチキな変形は，結び目の型を変えてしまいます．ところが，まさにこのことを利用して，結び目のある種の不変量を定義することができます．

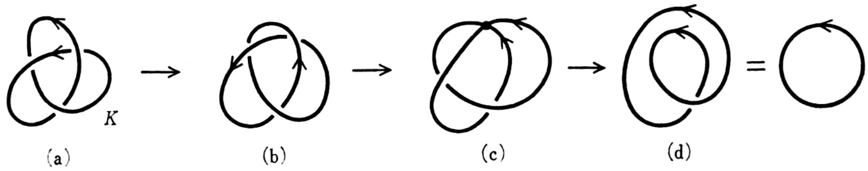


図5

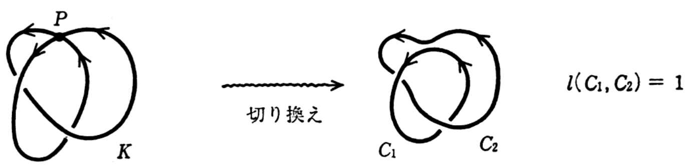


図6

図6を見てください．これは，図5のインチキ変形の過程で結び目 K が自分自身と交わった瞬間です（図5の(c)の段階）．この瞬間に，自己交点 P における矢印の進む方向を（線路のように）切り換えて見ましょう．すると，結び目 K は，2本の閉曲線 C_1 と C_2 に分かれてしまいます．C_1 と C_2 のまつわり数 $l(C_1, C_2)$ を考えると，今の場合は1です．そこで，はじめの結び目 K の $R(K)$ という不変量を

$$R(K) = 1$$

と定めます．

今は，1回だけの「インチキ変形」で自明な結び目になってしまうという簡単な場合でしたが，一般には結び目 K は，自分自身と1回だけ交差する変形で他の結び目 K' に移るはずです．またその時に上のようにして計算されるまつわり数 $l(C_1, C_2)$ も1とは限りません．こ

のとき，$R(K')$ がすでに計算されているとして，$R(K)$ を

$$R(K) = R(K') + l(C_1, C_2)$$

と定めます．ただし，すべて“mod 2”で考えることにします．つまり，$R(K)$ は 0 または 1 の値しかとらない不変量で，偶数は 0，奇数は 1 と思うわけです．「インチキ変形」によって全ての結び目はほどけてしまいますから，上のように定義することによって，ほどけるまでに必要な自己交差の回数に関する数学的帰納法で，$R(K)$ が任意の結び目 K について計算できることになります．じつは，この $R(K)$ は古くから知られている**ロベルテロ不変量**とよばれる結び目の不変量に一致します．ロベルテロ自身は別の方法でこの不変量を定義したのですが，上のように考えると，ロベルテロ不変量の本質はまつわり数であることがわかります．

図 4 の結び目について $R(K)$ を計算してみましょう．

$$R(\text{三つ葉}) = 1,\quad R(8\text{の字}) = 1,$$
$$R(K_{2,5}) = 1,\qquad R(K_{3,4}) = 1$$

と，どれも 1 になってしまいます．(これは単なる偶然です．ロベルテロ不変量が 0 の結び目もあります．たとえば自明な結び目がそれです．)

●ロホリンの定理

「多様体」とよばれる空間があります．空間内のどこでも好きな所に m 次元局所座標系が描けるような空間が m 次元多様体です．ある m 次元多様体 M が**平行性をもつ**というのは，M 上に m 本のベクトル場 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ があって，M の各点でそれらが 1 次独立になっていることです．また，M が**概平行性をもつ**というのは，M から 1 点を除いた残りの部分が平行性をもつことである，と定義します．これらの言葉を初めて聞く人にはあまりイメージが湧かないかも知れませんが，我慢してください．とにかく，そういう概念があります．

ロホリンの定理は「閉じた滑らかな 4 次元多様体 M が概平行性を持てば，M の符号数 (とよばれる整数値不変量) は 16 で割り切れる」ということを主張する定理です．この定理は 4 次元トポロジーの最も基本的な定理ですが，不思議なことに，**5 次元以上**の位相多様体の三角形分割問題と基本予想を背後から統制しているのがこの定理なのです．はじめに述べたカービーとジーベンマンの理論がこのことを明らかにしました．断絶しているはずの高次元と低次元のトポロジーの間には，ロホリンの定理を通じてのささやかな連続性 (連絡) があったわけです．

ロホリンの定理のロホリン自身による証明 (1952) は難解ですが，じつは，ロベルテロ不変量を使った初等的証明が可能です (松本，1976)．それは (p, q) 型トーラス結び目 $K_{p,q}$ のロベルテロ不変量 $R(K_{p,q})$ の計算から出発するものです．$K_{p,q}$ がどんな結び目かは，図 4 を見ると想像がつくと思います．いま，s を奇数とすると，$(s, s-1)$ 型のトーラス結び目のロベルテロ不変量は

$$R(K_{s,s-1}) \equiv \frac{1}{8}(1-s^2) \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

となります（この式の右辺は0または1に落して解釈します）じつは，ロホリンの定理をこの式から出発して証明することができるのです．ロベルテロ不変量の本性はまつわり数だと述べましたが，こうなると，ロホリンの定理の本性もまつわり数だと言うことができるのではないでしょうか．

●キャッソン不変量

またまた思い出話になって申しわけありませんが，ロベルテロ不変量からロホリンの定理が初等的に導かれることを注意した小さな論文（巻末文献（7））を1976年に書いたとき，今から思うと実に簡単な，しかももったいない見落しをしてしまいました．それは，ロベルテロ不変量の計算式

$$R(K) = R(K') + l(C_1, C_2)$$

を0と1に落さず，整数値のまま考えてみることをサボってしまったことです．これを整数値のままで考えれば，すぐに，ロベルテロ不変量を拡張する**新しい整数値不変量**が得られたはずなのです（ただし，整数値で考える時は，まつわり数 $l(C_1, C_2)$ の前の符号を ＋ にするか − にするかは自己交差の状況に応じて変えなければなりません）．当時は4次元の方にばかり目が向いていて，結び目の新しい不変量を定義しようなどとは全然思わなかったのですが，それが我ながらウカツでした．

この新しい整数不変量 $\lambda'(K)$ は1985年キャッソンによって定義されました．彼は，3次元ホモロジー球面とよばれる特殊な3次元多様体に対し，昔から知られていたロホリン不変量という0または1の値をとる不変量を整数値に拡張し，現在キャッソン不変量と呼ばれる不変量 λ を定義したのですが，その同じ仕事の中で，$\lambda'(K)$ も同時に定義しました．そして，キャッソン不変量と $\lambda'(K)$ とは，その本性において大体同じものであることも明らかにしています．

ということであれば，λ' の計算式

$$\lambda'(K) = \lambda'(K') \pm l(C_1, C_2)$$

を通して，キャッソン不変量の本性もまた，まつわり数だと言えなくもありません．

他方で，キャッソン不変量は，離散群の表現論やゲージ理論とも深く結びついた不変量であることが知られています．

さらに，3次元多様体については，キャッソン不変量をもう一段高度化したフロアーによるインスタントン・ホモロジー群，ウィッテンや河野俊丈氏，牛腸（ごちょう）徹氏達による，2次元共形場理論に結びついた新しい不変量などが近年続々と発見されていて，その豊饒さには目もくらむばかりです．

●結論的に言うと

高次元のトポロジーは扱いやすい．なぜなら（閉曲線の）結び目がないからである．低次元トポロジーは結び目の分だけ複雑であり豊かである．3次元空間で定義される「まつわり数」は，0と1に落せば4次元にまで生きのびる（絡みの片鱗＝ロホリンの定理）．そしてロホリンの定理は低次元と高次元の連絡をつける．まつわり数を整数値のまま扱うと，3次元多様体の不変量に姿を変える（キャッソンの理論），そして低次元特有の豊かな不変量の洪水につながって行く．——

ということになると思います．

（『数学セミナー』1990年8月号）

12年後のあとがき

旧版の『4次元のトポロジー』を「入門|現代の数学」というシリーズの中の一冊として日本評論社から出していただいたのが1979年ですから，それからもう12年もたってしまいました．今度新しく単行本として出していただくことになって，著者として大変嬉しいのですが，この12年間の進歩について少し書き加える必要を感じましたので，ここに書かせていただきます．

前の版が出た1979年は，今にして思えば，4次元トポロジーの爆発前夜だったわけです．第∞章の座談会をお読みになれば，そのころの雰囲気がおわかり頂けると思いますが，誰もが，「4次元には何かがある，しかし，その何かがどうしてもわからない」という気分だったと思います．このころまでの4次元トポロジーには，ロホリンの定理（及び，基礎技術的なウォールの定理，ホモトピー的なミルナーの定理）以外に中心的な定理がなく，「雑多な事実のよせあつめ」といった印象の方が強かったと思います．

R. Mandelbaum, Four-Dimensional Topology: An Introduction, Bull. Amer. Math. Soc., 2, 1980, 1-159.

という総合報告は，1980年までの4次元トポロジーの現状紹介ですが，そのような雰囲気がよくわかります．

そのころ，関心を持たれていた対象はキャッソン・ハンドルです．上記座談会でも，キャッソン・ハンドルの重要性は指摘されています．しかし，あんなにも複雑で野性的な対象がきちんとしたトポロジーにのるとは誰も思っていませんでした．そののち4次元ポアンカレ予想を解くことになるフリードマンだけが，執拗にキャッソン・ハンドルをいじっていたわけで，彼は偉かったと思います．1979年には，彼の予備的な結果が出ています：

M. H. Freedman, A fake $S^3 \times \boldsymbol{R}$, Ann. of Math., 110, 1979, 177-201.

彼は，この論文で開発されたテクニックを高度化して，結局，4次元ポアンカレ予想を1981年から82年にかけて解きました．彼の勝利宣言みたいな論文が，

M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, J. Diff. Geom., 17, 1982, 337-453.

です．フリードマンの仕事の紹介記事「4次元ポアンカレ予想の解決」(『数学セミナー』1982年7月号）を付録1に収めましたので，お読み下さい．フリードマンはこの論文の中で，4次元位相多様体についてはロホリンの定理が成立しないことを示し，PL多様体に位相同形にならないような4次元位相多様体の存在も示しています．本文最後に述べた4次元の三角形

分割問題は否定的に解決されたわけです．

上の論文を読みますと，フリードマンの血のにじむような努力が良くわかりますが，その背後に，彼の努力を支えているアメリカの「野性的トポロジー」の伝統をひしひしと感じます．ソリッド・トーラス（＝中身のつまったドーナツ）の中にもうひとつのソリッド・トーラスをねじって入れ，更に，中に入れたトーラスの中に，第3のソリッド・トーラスをねじって入れ，という操作を無限回反復した極限として得られるような「世にもきたならしい図形」を，正面切って数学の対象として取り上げるのが野性的トポロジーです．野性的トポロジーの対象は上記のものに限りませんが，とにかくみなひどく奇妙な対象です．ビング（R. H. Bing）というアメリカのトポロジストは，このような研究に一生を捧げ，数年前（1986年）に71歳で亡くなりました．ビングは，実に独特の図形的感覚を持った人で，面白い研究をたくさんやっています．尊敬すべき数学者です．ビングの弟子には優秀な人が大勢いて，ビング・スクールという学派を形成しています．フリードマンは直接にはビングの弟子ではないのですが，仕事の内容はビング・スクールにつながるものを持っています．ビングの前には，ビングの先生のムーア（R. L. Moore）という人がテキサスにいて，「生の図形」を素手でいじるという感じのトポロジーを独特の方法で教育していました．（ムーア・メソッドとよばれる方法で，定理だけを述べて，証明は，何から何まで全部学生に考えさせるのだそうです．）このような，何十年にもわたるアメリカのトポロジーの伝統が，フリードマンでひとつの頂点に達したという印象を受けました．

フリードマンの結果もかなり驚きでしたが，それに追い打ちをかけるように現われたのが，ドナルドソンの理論でした．ヤン－ミルズ場理論とかゲージ理論とかは，名前くらいは聞いたことがあったのですが，まさか，それが自分が関心を持っている「4次元トポロジー」の中心的な道具として登場しようとは夢にも思いませんでしたので，正直言って，完全にノックアウトをくらった心境でした．ドナルドソンの論文は，

S. K. Donaldson, An application of gauge theory to four dimensional topology, J. Diff. Geom., 18, 1983, 279-315.

に出ています．フリードマンの定理とドナルドソンの理論をあわせると，さまざまの結論が出ます．そのうちのひとつが，「$\boldsymbol{R}^4$ 上のエキゾチックな微分構造の存在」で，これについては（ショックを隠しつつ書いた）解説記事を付録2に収めました．

1983年のもうひとつの痛い思い出は，不注意による大腿骨の骨折です．4月から6月まで入院して，手術とリハビリの日々を過しました．そのとき，テキサスに行っていた久我健一氏から「“$S^2\times S^2$ の2次元ホモロジー類 $p\oplus q$ が滑らかに埋め込まれた S^2 で表わせることの必要十分条件は，$|p|\leqq 1$ または $|q|\leqq 1$ である”という定理が証明できた」という手紙をもらい，今度こそ日本人がやってくれたと思って大変嬉しく思いました．この問題は，本文§10.2とか座談会とかでしばしば言及されているように，4次元トポロジーの進歩を見るための試金石だったからです．久我の定理によれば，$2\oplus 3(\in H_2(S^2\times S^2))$ は滑らかな S^2 の埋

め込みでは表わせないことがわかります．短いけれど鋭い久我氏の論文は，

K. Kuga, Representing homology classes of $S^2\times S^2$, Topology, 23, 1984, 133-137.

に出ています．この中では，ドナルドソンの主定理が巧妙に使われています．

ドナルドソンは，主定理確立後，

S. K. Donaldson, Connections, cohomology and the intersection forms of four manifolds, J. Diff. Geom., 24, 1986, 275-341,

S. K. Donaldson, Irrationality and the h-cobordism conjecture, J. Diff. Geom., 26, 1987, 141-168,

S. K. Donaldson, The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology, J. Diff. Geom., 26, 1987, 397-428,

S. K. Donaldson, Polynomial invariants for smooth four-manifolds, Topology, 29, 1990, 257-315.

などの論文を矢つぎばやに書いて，重要な問題を次々に解決して行きました．たとえば，第∞章の座談会の「Rigidityと複素曲面」という小見出しのついた所で，$K3$曲面の交点形式の中の3つの“$S^2\times S^2$の交点形式”は「ただの飾りではない」という発言がありますが，それを実際に証明しました．また，ドルガチェフ曲面という複素曲面と有理楕円曲面 $CP_2\#9\overline{CP_2}$ は位相同形であるが微分位相同形でないことも証明しました．これは，本文§10.4の最後に述べた4次元多様体に関する基本予想を否定的に解決したことに相当しています．

フリードマンとドナルドソンの2つの大きな仕事を受けて，80年代にはいろいろな人がいろいろな論文を書いて，2人の仕事を応用したり精密化したりしました．R. Fintushel, R. J. Stern, R. Friedman（4次元ポアンカレのフリードマンとは別人），J. W. Morganという人達の活躍が目立ちます．日本の人では古田幹雄氏の仕事が光っています．たとえば彼は，

M. Furuta, Homology cobordism group of homology 3-spheres, Inventiones math., 100, 1990, 339-355.

の中で，ホモロジー3球面の群が，「とても大きい群」であることを示しました．

最近，物理と数学の接近が言われていますが，理論物理から発生したゲージ理論と4次元トポロジーとが結びついたことは，確かにそのような「接近」のひとつの証であったと思います．

4次元のトポロジーの激動の10年だった80年代が終って，現在は少し沈静化の傾向が感じられます．

フリードマンはクインと共著で4次元位相多様体に関する教科書を書きました．

M. H. Freedman and F. Quinn, Topology of 4-manifolds, Princeton Math. Series 39, Princeton, 1990.

がそれです．また，ドナルドソンもクロンハイマーと共著で教科書を書きました：

S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, The Geometry of Four-Manifolds, Oxford

Math. Monographs, Oxford, 1990.

こうして，4次元トポロジーは，ロホリンの定理，フリードマンの定理，それにドナルドソン理論という，3つの基本軸を持つことになりました．しかし，これで全て終りかというと，実は，もうひとつ重要な何かが欠けているのです．それは，

4次元球面上にエキゾチックな微分構造が存在するか

という問題で，上記3理論は，この問題に関しては無力なのです．第4の全く新しいアイデアが必要と思われます．読者の中から，この問題に挑戦する人が出ることを願って止みません．（解ければフィールズ賞がもらえるかも知れません．）

若い読者は，そんなことを全然感じないかも知れないのですが，私にとって残念に感じられるのは，4次元トポロジーが少し難しくなり過ぎたことです．難しい分野は多くの人達が近づきにくくなってしまうおそれがあります．私が高次元トポロジーから4次元トポロジーに転向して見ようと思ったのは1975年でした．そして，そのころは，少し大げさに言えば，ほとんど何もなかったのです．ただ，今年（1991年2月）亡くなられた田村一郎先生は，このころから，「これからは，葉層構造と4次元多様体が大事だ」とおっしゃっていて，東大で「3次元多様体論・4次元多様体論」という講義をされていました．また，もっと前には，福原真二氏が，カービー－ジーベンマン理論から4次元多様体に関する情報を引き出す努力を続けていました：

S. Fukuhara, On an exotic PL automorphism of some 4-manifold and its application, J. Math. Soc. Japan, 24, 1972, 574-585.

さらに言えば，佐藤肇氏と西森敏之氏がロホリンの手法でK3曲面のトポロジーとホモロジー3球面の群にアタックしていました．佐藤氏，西森氏を中心とする何人かを，冗談まじりに「日本ロホリン学会」と呼んで（自称，他称）いたのがなつかしく思い出されます．このように，じつは，4次元多様体を研究しようという雰囲気は除々に盛り上がっていたわけです．私自身は，加藤十吉氏との共同研究で始まった「余次元2の手術理論」をずっとやっていましたが，この理論を応用すると，ある奇妙な性質をもつ4次元多様体が構成できることに気付き，これが4次元トポロジーをやってみようと思うきっかけになりました：

Y. Matsumoto, A 4-manifold which admits no spine, Bull. Amer. Math. Soc. 81, 1975, 467-470.

始めてみると，わかっていることはそれほど多くなく，ただ，ロホリンの定理だけがあって，それが何とも神秘的に見えたので，その背後にある4次元の秘密を探り出したいと思いました．ごく簡単なことから自分で考えてみると，4次元はどうも変なことだらけで，常識から外れたような現象がいくつも見つかりました．その後，プリンストンの研究所に行ったとき，少し本格的な問題に取り組もうと思って，4次元多様体の間の滑らかなh-コボルディズム定理の反例の構成を考えました．反例の候補は見つかったのに，実際にそれが反例であることを証明することがどうしてもできませんでした．「明らかにこれは反例だ！」という

直観があるのに，それを理論的に証明できないもどかしさは，全くつらいものでした．今から思うと，あの当時，それを理論的に証明するのは無理だったようで，実際，ドナルドソン理論を経過しなければ正当化できない「直観」だったのです．

帰国後，4次元トポロジーを宣伝すべく，旧版の『4次元のトポロジー』を書きました．それが1979年です．その2年後から始まった4次元トポロジーの突然の爆発．何もない所で，じっくりと自分の理論を築いてみたいという夢が吹きとばされた感じがしました．

しかし，しょげてばかりいても仕方がないので，何かしなければなりません．もし，そのとき，まっさらの学生だったら，いっしょうけんめいドナルドソン理論を勉強して，その路線上で論文を書くようになったと思うのですが，自分の夢をうち砕いた人の理論など，本当を言うとあまり進んで勉強する気になれませんでした．

そこでいっしょうけんめいやって見ようと思ったのが非単連結な楕円曲面の微分同相類の研究です．微分同相類の話には，(位相同形しか扱えない) フリードマン理論は全く役立ちませんし，ドナルドソン理論は，微分同相で**ない**ことを判定する不変量を提供するだけなので，微分同相で**ある**ことを示すには役立ちません．フリードマン理論もドナルドソン理論も役立たない所で仕事をしたいと思ったのです．また，なぜ**非**単連結な楕円曲面かと言うと，単連結な楕円曲面については，多重ファイバーのない場合にカス (A. Kas) とモイシェゾン (B. Moishezon) の定理があって，微分同相類が良くわかっているからです．楕円曲面は，複素曲面の重要な例ですが，また位相的にもとりあつかいやすい形をしています．

1984年の後半に，非単連結な楕円曲面，とくにその大域的モノドロミーというものについていっしょうけんめい考えました．「石に頭をぶつけるようにして考えた」という記憶があります．そして，10月か11月ごろ，すっきりした結論が得られました．それは「特異ファイバーは持つが，多重ファイバーを**持たない**ような極小楕円曲面の微分同相類は，全空間と底空間のオイラー数で決まる」という定理で，次の論文に発表しました：

Y. Matsumoto, Diffeomorphism types of elliptic surfaces, Topology, 25, 1986. 549-563.

その後，上正明氏が，「多重ファイバーを**3本以上**持つ場合は，微分同相類は全空間のホモトピー形で決まる」という定理を (1985年半ばに) 証明し，

M. Ue, On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers, Inventiones math. 84, 1986, 633-643.

という論文で発表しました．ところが，ちょうど同じ1985年ごろ，ドナルドソンが彼の理論を楕円曲面に適用して，「多重ファイバーが**2本**の場合には，楕円曲面の微分同相類がホモトピー形で決まら**ない**例がある (前述のドルガチェフ曲面と有理楕円曲面の例)」ということを証明しました：

S. K. Donaldson, La topologie différentielle des surfaces complexes, C. R. Acad. Sci. 301, 1985, 317-320.

楕円曲面に関しては，我々の結果とドナルドソンの結果が補い合う関係になったわけで，「我々の路線もけっこうイケル」という実感をもちました．幾何的なトポロジーの手法とドナルドソン流の手法がぴったり補い合う関係にあることを示したもうひとつの例は，$K3$ 曲面の交点形式の自己同型が，いつ $K3$ 曲面の微分同相で実現できるか，を研究した松本堯生氏の論文です：

T. Matumoto, On diffeomorphisms of a $K3$ surface, *Algebraic and Topological Theories-to the memory of Dr. Takehiko Miyata*, Kinokuniya, 1985, 616-621.

松本氏は，$K3$ 曲面の交点形式の自己同型群 G から，位数 2 の群 $\boldsymbol{Z}_2$ の上へのある準同型写像 $\varepsilon: G \to \boldsymbol{Z}_2$ を考え，ε の核 $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ に属する自己同型は $K3$ 曲面の微分同相で実現できることを証明しました．一方ドナルドソンは前掲の論文 (1990) の中で，$\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ に属さない自己同型は $K3$ 曲面の微分同相では実現できないことを証明しています．そのあと，私自身は多様体の教科書を書いたり，雑用をこなしたりで，何年か過ごしてしまいましたが，「我々の路線」をもう少し追求して，たとえば「超楕円曲面」などを研究してみたいと思っています．

自分の話が長くなってしまいましたが，4 次元トポロジーも，フリードマン理論やドナルドソン理論が全てをカバーしているわけではなく，先ほどの「4 次元球面の微分構造」という本格的大問題をはじめとして，中くらいの問題とか，易しそうで手ごろな問題とか，まだいろいろ残っています，ということを言いたかっただけです．

「結び目理論の 4 次元版」なども，まだ，やることがたくさんありそうな面白い分野ではないでしょうか．通常の結び目理論は 3 次元球面の中にねじれて入っている円周（＝1 次元球面）の研究ですが，4 次元球面の中にねじれて入っている 2 次元球面（または，一般に 2 次元閉曲面）を研究するわけです．この分野では，外国では，レヴィン（J. Levine）とかヒルマン（J. A. Hillman）とかいった人達ががんばっています：

J. A. Hillman, 2-Knots and their Groups, Australian Math. Soc. Lecture Series 5, 1989.

この「結び目理論の 4 次元版」は，日本で早くから研究された分野で，寺阪英孝，矢島猛，樹下真一，細川藤次，柳川高明，鈴木晋一，渋谷哲夫，河内明夫，…の諸氏の築いた 30 年以上にわたる研究の伝統があります．1976 年に出た鈴木氏の総合報告が，この分野への良い手引きになると思います：

S. Suzuki, Knotting Problems of 2-Spheres in 4-Space, Mathematics Seminar Notes Kobe Univ., 4, 1976. 241-371.

また，これ以降の結果については，

河内明夫編著『結び目理論』シュプリンガー・フェアラーク東京，1990

の第 13，14 両章を御覧下さい．古典的な結び目理論は 4 次元多様体論とも関係深いものですが，上記の本は結び目理論の現状を詳しく知るのに役立ちます．

若い世代では，吉川克之，金信泰造両氏をはじめとする人達が活躍しています：

K. Yoshikawa, On 2-knot groups with abelian commutator subgroups, Proc. Amer. Math. Soc., 92, 1984, 305-310.

岩瀬順一氏の「T^2結び目に沿うデーン手術」も「4次元球面内の2次元結び目」と4次元多様体を結びつける面白い試みだと思います：

Z. Iwase, Dehn-surgery along a torus T^2-knot, Pacific J. Math.,133 (1988), 289-299.

また，上の話には直接関係ありませんが，M. Ho. キム，小島定吉，F. レイモンド三氏共著の，

M. Ho. Kim, S. Kojima and F. Raymond, Homotopy invariants of nonorientable 4-manifolds (プレプリント).

は，向きづけ不可能な4次元多様体に関して，誰も気のつかなかったホモトピー不変量を「発掘」したもので，F-D理論の盛んな時代に，まだこういうこともあったのか，という新鮮な驚きを与えてくれる論文です．

複素曲面は4次元多様体の典型的な例になっていますので，複素曲面のトポロジーも本格的にやったら良いと思います．ドナルドソン理論やフリードマン理論は，ある特別な場面（ドルガチェフ曲面など）ではものすごく強力ですが，この分野全般に圧倒的なパワーを発揮しているわけではありません．まだまだ素朴な方法で，十分面白い研究ができます．たとえば前述の上正明氏の仕事とか，あるいは井上曲面（の半分）を例として含む大場清氏の研究，

K. Ohba, On fiber bundles over S^1 having small Seifert manifolds as fibers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I. A. Math., 37, 1990, 659-702.

などが，あります．

ドナルドソン理論を駆使した複素曲面の研究としては，たとえば，

R. Friedman and J. Morgan, On the diffeomorphism types of certain algebraic surfaces I, II. J. Diff. Geom., 27, 1988, 297-369.

を御覧下さい．

以上，思いつくままに，書きましたが，書きもらしてしまった面白い話もたくさんあると思います．F-D両理論が一段落した感じのする90年代こそ，また，じっくり腰をすえて，いろいろなことを自由に考えてみる好機かも知れません．

意欲的な読者がF-D両理論を勉強されることは，もちろん，おすすめします．両氏の論文や教科書に直接当ってみるのも良いでしょうし，次のような手ごろな参考書もあります．

H. B. Lawson, The Theory of Gauge Fields in Four Dimensions, Regional conference series in math. 58, 1985. Amer. Math. Soc. (約100頁)

R. C. Kirby, The Topology of 4-Manifolds, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag,

1374, 1989.（約 100 頁）

後者はたくさん絵があって面白いのですが，もしかすると初めての人にはちょっと読みにくい所があるかも知れません.

また，楕円曲面のトポロジーについては，

上正明，Topology of Elliptic Surfaces and Related Topics, Seminar Notes on Differential Topology, 1991.（京大理学部数学教室）（日本語　約 60 頁）

が良くまとまっています.

最後になりましたが，旧版の『4 次元のトポロジー』の執筆をすすめて下さった加藤十吉氏にあらためて感謝致します．またこの新版を出していただくにあたって大変お世話になった日本評論社の亀井哲治郎・佐藤大器の両氏に感謝致します．（1991 年 7 月 7 日）

30 年を経て

「30 年を経て」というのは，何だか年寄り臭い題名ですが，人間誰しも，過去 30 年間のことを語ろうとすると，（しかも，30 年前にすでに 30 歳代だったものとしては）自分が「もう若くない」ことを否応なく実感させられてしまいます．

この本『4 次元のトポロジー』はシリーズ「入門｜現代の数学」の一冊として，1979 年，ちょうど 30 年前に出版されました．この本は私が初めて書いた単行本で，そのころは，ワープロとかパソコンとか便利なものはなくて，ただただ原稿用紙の枡目をペンで埋めて行きました．途中で相当苦しくなったので，「もう書くのを止めた」と言いましたら，妻から「これを途中で止めたら，生涯，一冊の本も書けないと思うよ」と言われて，それもそうかも知れないと考え直して，四苦八苦の末にようやく書きあげたのが，旧版の『4 次元のトポロジー』です．今となっては，書きあげておいてよかったと思います．そして，この妻の一言に感謝しています．

旧版は初版から 12 年たった 1991 年に，『4 次元のトポロジー[増補版]』として再発行していただきました．それからさらに 18 年たって，今年もう一度，この「30 年を経て」というあとがきを付けくわえて再々発行していただけることになりました．研究者として出発して間もないころに書いた本が，研究者としてそろそろ店じまいをしかけている頃にまた再発行していただけるなどとは夢にも思いませんでした．とても幸せに感じます．日本評論社の度重なるご好意に深く感謝いたします．

30 年前に出版された旧版の『4 次元のトポロジー』は，187 ページまで，つまり「付録 1」の前までがその内容でした．ご覧になっていただければお分かりのように「ロホリンの定理」を唯一の基本定理とするごく素朴な内容です．これが当時の 4 次元トポロジーの全て，とは言わないまでも，その半分くらいにはなっていたのではないかと思います．内容は少なかったのですが，「4 次元には何かがある」というメッセージは盛り込めたと思います．その後の 30 年間の 4 次元トポロジーの進展は目覚ましく，私のような一個人が全体を見渡すことが難しくなってしまいました．1991 年の増補版に付けた「12 年後のあとがき」のなかで，そのころの 4 次元トポロジーの様子を簡単に述べましたが，もとより不十分でした．それからさらに 18 年たったいま，4 次元トポロジーの様子をサーベイすることなど，もはや私には不可能です．しかし，この本に「あとがき」のようなものを書くのも，これが最後の機会だと思いますので，自分に関心のあるテーマに限って，いくつかの話題を紹介し，感想めいたものを述べさせていただくことにしました．取り上げた題材には主観的な偏りがありますし，重要な発展がいくつも抜けていることをあらかじめお断りしておきます．

なお，2007年に出版された『数学辞典(第4版)』に「4次元多様体」という項目が新設されました．そこで，かなりの知識が得られると思います：

日本数学会編集，数学辞典(第4版)，岩波書店，2007.

(敬称について：以下の文章で，日本人の名前には，何々先生，あるいは何々氏という敬称をつけましたが，外国人の名前にはつけませんでした．そのほうが，文章の調子が自然になると感じられたからで，それ以上の意味はありません．)

●サイバーグ-ウィッテン理論とトム予想

1994年の4月に神戸大学で日本数学会の年会があり，4次元トポロジーのサーベイ・レクチャーを依頼されました．相当「落ちこぼれ状態」を自覚していたので，数学会の理事だった川久保勝夫先生にいったんお断りをしましたが，「落ちこぼれくらいのほうが，聞いていて分かり良い」というようなことを言われて，結局引き受けてしまいました．その講演内容をまとめて，雑誌「数学」に載せたのが次の記事です．

松本幸夫，4次元多様体の今と昔，数学，第47巻第2号，1995，158–175.

この記事をまとめている間に，ウィッテンの次の論文が現れました．

E. Witten, Monopoles and four-manifolds, Math. Res. Lett., 1, 1994, 769–796.

ウィッテンは理論物理学者ですが，物理学のサイドからの数々の「神秘的」に見える数学的予言により数学者を刺激し，1980年代から始まった「物理と数学の接近」を担った人物の一人です．京都で1990年に開催された国際数学者会議(ICM)で，森重文氏，ジョーンズおよびドリンフェルトとともにフィールズ賞を受けました．この論文は，「紫外領域と赤外領域の双対性」などという不思議な言葉が飛び交い，物理的なイメージの説明が多く，正直いって，私にはよく分かりませんでした．しかし，時間がたってみると，いくつかの教科書が現れ，滑らかな(すなわち，C^∞級の)4次元多様体の上のサイバーグ-ウィッテン(Seiberg-Witten)方程式(モノポール方程式)というものが多少とも理解できました．

モノポール方程式の具体的な形は次の通りです：

$$D_A\Phi = 0, \qquad F_A^+ = q(\psi)$$

この方程式の求めるべき解は対 (A, ψ) です．ここに，A は4次元多様体 X 上のある複素直線束 L の接続の接続形式で，F_A はその曲率形式，F_A^+ はその「自己双対成分」です．ψ は，X 上に「スピン c 構造」なるものをひとつ設定したとき，それに付随する複素2次元の複素ベクトル束 S^+, S^- の一方 S^+ の滑らかな切断で，「ディラック作用素」$D_A : \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$ の核に属するものです．$q(\psi)$ はひどく乱暴に言えば ψ の2乗です．それが，F_A^+ に等しいというのですから，ψ は F_A^+ の「平方根」と見えなくもない．結局，モノポール方程式というのは，複素直線束 L の接続 A で，その曲率形式の自己双対成分 F_A^+ の「平方根」がディラック方程式の解になるものをもとめよ，と言っていると考えられます．ウィッテンはこの方程式の解のモジュライ空間から4次元多様体の不変量を抽出しようとしていたのでした．

しかし，こんな下手な「解説」よりも，次の教科書をお読みになることをお勧めします．

J. W. Morgan, The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, 1996.

J. W. モーガン，二木昭人訳，サイバーグ・ウィッテン理論とトポロジー，培風館，1998（上記教科書の日本語訳）

さらに，次の深谷賢治氏の本はドナルドソン理論の教科書としても優れていると思いますが，その「付録」に「サイバーグ-ウィッテン理論瞥見」という簡明な紹介があります．

深谷賢治，ゲージ理論とトポロジー，シュプリンガー・フェアラーク東京，1995.

サイバーグ-ウィッテン理論はドナルドソン理論と等価な理論らしいのですが，その等価性が数学的に証明されているのかどうか知りません．しかし，「等価」と思われているにもかかわらず，サイバーグ-ウィッテン理論のほうが扱いやすい．その理由は，接続形式 A の乗っているのが複素直線束で，その構造群が 1 次元のユニタリー群 $U(1)$（平たく言えば「円周」）という可換なリー群であることによります．ドナルドソン理論の構造群は $SU(2)$（平たく言えば「3 次元球面」）という非可換なリー群だったので，その扱いも難しかったわけです．

サイバーグ-ウィッテン理論の応用として，最初に成功したのが，トム（R. Thom）予想の解決でした．トム予想は，複素射影平面[1] $\mathbb{C}P^2$ の中に埋め込まれた向きづけられた閉曲面の種数に関する予想です．154 ページで説明したように，複素射影平面の 2 次元ホモロジー群 $H_2(\mathbb{C}P^2)$ は $\mathbb{Z}$ に同型で，その中に自然に埋め込まれた複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$（球面 S^2 に同相です）によって生成されます．d を自然数とします．$\mathbb{C}P^2$ に埋め込まれた滑らかで（すなわち，C^∞ 級で）向きのついた閉曲面 C の**次数**が d であるとは，$H_2(\mathbb{C}P^2)$ の要素として，C が，$\mathbb{C}P^1$ の d 倍に等しいこと（$[C]=d[\mathbb{C}P^1]$）をいいます．問題は，次数が d であるような C の種数 $g(C)$ はどのくらい小さくできるか，ということなのですが，トムはそれが次数 d の代数曲線（閉曲面です）の種数 $\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$ より小さくなることはない，と予想しました．これが**トム予想**とよばれる予想です．C^∞ 級の閉曲面なら，あちこち自由に曲がっていることも許されるが，代数曲線は「ピン」と張っていないといけない，だから種数も小さいはずだ，という気分だと思います．30 年以上（ことによると 40 年間くらい）解けなかった予想です．サイバーグ-ウィッテン理論がでた直後に，この予想はクロンハイマーとムロフカによって肯定的に解決されました：

P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, The genus of embedded surfaces in the projective plane, Math. Res. Letters, 1, 1994, 797-808.

1） 複素射影平面は 151 ページで説明しました．特別な複素曲面で，4 次元多様体です．151 ページでは，$\mathbb{C}P_2$ のように，複素次元 2 を下付きで書きましたが，現在は $\mathbb{C}P^2$ のように，実次元と同様に，上付きで書きます．なお，旧版では複素数全体，整数全体をそれぞれ $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Z}$ で表しましたが，ここでは $\mathbb{C}, \mathbb{Z}$ と表すことにします．

この論文で，次の定理が証明されました：

定理　C を $\mathbb{C}P^2$ に滑らかに埋め込まれた，次数が $d\,(>0)$ の閉曲面とすると，不等式

$$g(C) \geqq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

が成り立つ．

$d=3$ とおくと，右辺は 1 になります．つまり，次数 3 の閉曲面の種数は 1 までしか下がらない．したがって，球面(種数 0)では表せないことがわかります．次数 3 の閉曲面に関するこの事実は昔から知られていて，それを本文 160 ページの定理 10.3 で(ロホリンの定理に基づいて)証明したのでした．

上記のクロンハイマーとムロフカの定理は後に大幅に拡張されて，次のような一般的な不等式が証明されるまでになりました．この不等式の右辺の L は，滑らかで閉じた 4 次元多様体 X 上の複素直線束で，SW(Seiberg-Witten)類とよばれるものです．右辺の $\langle L, [C]\rangle$ は 2 次元コホモロジー類と考えた L と 2 次元ホモロジー類 $[C]$ とのペアリングで，単なる整数です．同じく，$[C]$ の自己交点数 $[C]\cdot[C]$ も整数です．さらに，記述を簡単にするため，$b_2^+>1$(すなわち，交点形式が正定値であるような $H_2(X\,;\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間の次元が 2 以上)であることを仮定します．

定理　X に滑らかに埋め込まれ，向きのついた閉曲面 C(であって $[C]\cdot[C]>0$ を満たすもの)の種数 $g(C)$ は次の不等式で下から押さえられる：

$$2g(C)-2 \geqq |\langle L, [C]\rangle|+[C]\cdot[C]+2d(L),$$

ここに，

$$d(L) = \frac{c_1(L)^2-(2\chi(X)+3\mathrm{sign}(X))}{4}$$

であって，$\chi(X)$ は X のオイラー標数で，$\mathrm{sign}(X)$ は X の符号数．また，$b_2^+(X)=1$ の場合も，同様の不等式がある．

これらの不等式は**随伴不等式**とよばれています．それは，複素曲面論の随伴公式とよばれる公式の C^∞ 級の類似になっているからです．X が複素曲面(もちろん，特別な 4 次元多様体)で，C が X のなかの特異点のない複素曲線とすると，X の「標準束 K_X」が SW 類 L となり，その場合は，上の不等式は等式となります(右辺の絶対値は不要ですし，$d(L)=0$ となります)．これが，複素曲面の随伴公式です．4 次元多様体の随伴不等式は次の論文で証明されました：

P. Ozsváth and Z. Szabó, Higher type adjunction inequalities in Seiberg-Witten theory, J. Diff. Geom., 55, 2000, 385-440.

4 次元多様体論の初期から，与えられた 4 次元多様体の与えられた 2 次元ホモロジー類が，いつ球面で表わされるか，という問題がありました．随伴不等式はその問題に，ほぼ最終的な答えを与えたものということができます．

●古田の基本定理

サイバーグ-ウィッテン理論がドナルドソン理論と等価であるとしても，どうもドナルドソン理論のほうが幾何的な意味が見えやすい．サイバーグ-ウィッテン理論は理論があっさりし過ぎているのではないか，という漠然とした偏見を持っていました．この偏見は古田幹雄氏の見事な仕事によって打ち破られました．

古田氏は，サイバーグ-ウィッテン理論を思いがけない方法で深化させたのです．サイバーグ-ウィッテン方程式そのものというよりむしろ，その方程式に対応する作用素を無限次元空間の間の写像と考え，これにホモトピー論を適用して何らかの情報を引き出そうというのが古田氏のアイデアだと思います．実際には，その作用素の「有限次元近似」を考え，それに写像のホモトピー論を適用しました．こうして証明されたのが次の定理です．

古田の定理　滑らかで閉じた 4 次元多様体 M がスピン構造[2] を持ち，かつ第 2 ベッチ数 b_2 がゼロでなければ，不等式

$$b_2(M) \geqq \frac{5}{4}|\mathrm{sign}(M)|+2$$

が成り立つ．

ここに，$\mathrm{sign}(M)$ は M の符号数です．有名な $K3$ 曲面(複素曲面なので 4 次元多様体です)はスピン構造をもち，$b_2(K3) = 22$, $\mathrm{sign}(K3) = -16$ なので，古田の不等式で等号が成り立つ例になっています．

この定理が現れる前は，滑らかで閉じた 4 次元多様体の形状を制限する基本定理として，ロホリンの定理とドナルドソンの定理があるのみでした．古田の定理は滑らかな 4 次元多様体の形状に関する第 3 の基本定理と呼ぶにふさわしい定理だと思います．

古田の定理は 1995 年前後に証明されました．このころ，明治大学の理工学部の服部晶夫先生のセミナーで，古田幹雄氏がこの定理について講演したのを覚えています．論文として出版されたのは少し遅くなりましたが，次の論文がそれです．

M. Furuta, Monopole equation and the 11/8-conjecture, Math. Res. Lett., 8, 2001, 279-291.

古田氏はこの業績により，1998 年度日本数学会秋季賞を受賞しました．次の業績紹介記事をご覧ください．

松本幸夫，古田幹雄氏の業績 I ── 位相幾何学の立場から，数学，第 51 巻第 2 号，1999, 176-180.

深谷賢治，古田幹雄氏の業績 II，数学，第 51 巻第 2 号，1999，180-183.

古田氏によって切り開かれた理論的な新境地は，バウアー(S. Bauer)，古田幹雄，亀谷幸生，松江広文，南範彦をはじめとする諸氏によってさらに発展しています．

---

2)　4 次元多様体については，スピン構造をもつことと，210 ページで定義した「概平行性」を持つこととは同じことです．

ついでながら，ここで**4次元多様体の基本定理**と考えられる定理をまとめておきましょう（カッコ内の数字は論文発表の年です）：

○ 位相多様体に関するもの…………　● フリードマンの定理(1982)

○ 滑らかな多様体に関するもの……
- ● ロホリンの定理(1951)
- ● ドナルドソンの定理(1983)
- ● 古田の定理(2001)

●ホモロジー3球面の群 θ_3^H

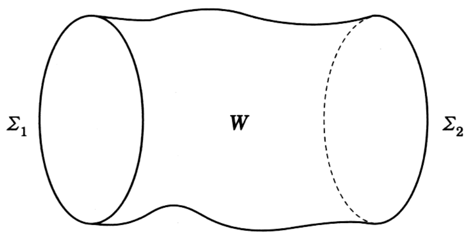
3次元と4次元のいわゆる「低次元トポロジー」は大発展しました．しかし，依然として，よく分からないのが，ホモロジー3球面の群 θ_3^H です．前節で掲げた古田氏の業績紹介Ⅰの記事のなかで次のように書きました．「θ_3^H はトポロジーの難しい本質を体現したような群であって，4次元位相幾何学とは表裏一体の関係にある．4次元多様体の深さという“垂直方向の闇”を“水平方向”に展開しているのが θ_3^H であるともいえる．」この考えは今でも変わっていません．その記事と一部重なりますが，この群について少し述べます．

閉じて向きのついた3次元多様体 Σ が**ホモロジー3球面**(3次元ホモロジー球面というべきかも知れませんが)であるとは，Σ が「通常の」3次元球面 S^3 と同じ整係数ホモロジー群をもつことです：

$$H_*(\Sigma\,;\mathbb{Z}) \cong H_*(S^3\,;\mathbb{Z})$$

つまり，「ホモロジーの観点からみると3次元球面(略して「3球面」)であるように見える3次元多様体」がホモロジー3球面です．ホモロジー3球面を最初に発見したのはポアンカレである，ということは本文§10.3「ポアンカレのつまづき」のところで述べました．なお，そこでは，$H_1(\Sigma\,;\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ であるような閉じた3次元多様体のことが述べられていますが，このような3次元多様体は実はホモロジー3球面であることが証明できます．

二つのホモロジー3球面 Σ_1 と Σ_2 が**ホモロジー同境**であるとは，非交和 $\Sigma_1 \cup (-\Sigma_2)$ がコンパクトで向きのついた滑らかな4次元多様体 W の境界となり，包含写像 $i_1 : \Sigma_1 \to W$ と $i_2 : \Sigma_2 \to W$ が両方とも整係数ホモロジー群の同型を引き起こすことである，と定義します(下図)．



ホモロジー3球面であるような3次元多様体は無限個存在しますが，ホモロジー3球面全体の集合において，互いにホモロジー同境であるような二つのホモロジー3球面を「同一視」

することによって得られる集合には，「連結和」# を「和」として可換群の構造が入ります．この群がホモロジー 3 球面の群 θ_3^H です[3]．通常の 3 次元球面 S^3 が 0 の役割をします．

ドナルドソンがゲージ理論を 4 次元トポロジーに持ち込む 1982/3 年以前には，この群の構造は全く不明でした．ただ，ロホリン不変量とよばれる準同型

$$\rho : \theta_3^H \to \mathbb{Z}_2$$

があって，それが全射であることが知られているのみでした．ここで，$\mathbb{Z}_2$ は二つの要素，0 と 1，から成る小さな非自明群です．ρ は次のように定義されます：

任意のホモロジー 3 球面 Σ は，コンパクトで滑らかな 4 次元多様体 W でスピン構造をもつものの境界になることが知られています：

$$\Sigma = \partial W$$

そして，W の符号数は 8 で割り切れることも知られています[4]．ロホリン不変量 $\rho(\Sigma)$ は

$$\rho(\Sigma) = \frac{\mathrm{sign}(W)}{8} \pmod 2$$

という式で定義されます．すなわち，Σ を境界とするようなスピン多様体 W の符号数が 16 の倍数ならば $\rho(\Sigma) = 0$ とおき，16 の倍数+8 であれば $\rho(\Sigma) = 1$ とおきます．定義はこれだけです．ロホリンの定理から，$\rho(\Sigma)$ の値が Σ のみによって決まり，Σ を境界に持つ滑らかなスピン多様体 W の取り方に依存しないことが保証されます．

ドナルドソンの仕事以前には，「このロホリン不変量 ρ は同型であろう」という「乱暴な予想」すら未解決だったくらいです．ですから，この「乱暴な予想」が正しければ，$\theta_3^H \cong \mathbb{Z}_2$ となってしまって，θ_3^H はたった二つの要素しか含まない群である（つまり，すべてのホモロジー 3 球面を「ホモロジー同境」の関係で分類すれば，たった 2 種類しかない）ということになります．こんな乱暴な可能性も否定できなかったわけです．

このようにほとんど何も構造が分かっていない群でしたが，この群 θ_3^H はトポロジーでは非常に重要な役割をする群であって，高次元トポロジーにも関係することが知られていました．松本堯生氏と，ガレフスキーとスターンにより，「もし，θ_3^H のなかに $\mathbb{Z}_2$ と同型な部分群 G があって，ρ を通じて G と $\mathbb{Z}_2$ の同型が実現されれば，すべての高次元位相多様体（PL 多様体とは限らない）は単体的複体に分割可能である」という定理が証明されています：

T. Matumoto, Variétés simpliciales d'homologie et variétés topologiques métrisables, thèse, Univ. de Paris-Sud, Orsay, 1976.

D. E. Galewski and R. J. Stern, Classification of simplicial triangulations of topological

---

3） 同様に，n 次元でも，ホモロジー n 球面の群 θ_n^H が定義できますが，構造が解明されていないのは，$n = 3$ のときだけです．

4） ロホリンの定理により，滑らかで**閉じた** 4 次元多様体 W がスピン構造を持てば，その符号数 sign(W) が 16 で割りきれることが分かりますが，今の場合のように，W がホモロジー 3 球面の境界を持つ場合には，単に 8 で割りきれることしか証明できません．

manifolds, Ann. of Math., 111, 1980, 1–34.

松本堯生氏とガレフスキー–スターンの定理で存在が「期待されている」部分群 G が実際にあるかどうか，まだ解決されていません.

ドナルドソンによるゲージ理論導入後には，θ_3^H についての「乱暴な予想」は否定されました．そして，「12 年後のあとがき」の 215 ページで掲げた古田幹雄氏の論文(1990)によって，θ_3^H がものすごく大きな群であることが示されました．次の定理がその結果です：

定理　群 θ_3^H は部分群として $\mathbb{Z}^\infty$ $(\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots)$ を含んでいる.

今日でも，θ_3^H に関して，この結果を超える知見はないと思います.

●11/8-予想について

前々節に掲げた古田氏の論文の表題にある 11/8-予想というのは次のような予想です．4 次元多様体論の基本的な予想のひとつで，2009 年 10 月現在も未解決です.

11/8-予想　滑らかで閉じた 4 次元多様体 M がスピン構造をもてば，次の不等式が成り立つであろう：

$$b_2(M) \geqq \frac{11}{8}|\mathrm{sign}(M)|$$

この予想は，間接的な表現ながら，私の論文で初めて述べられた予想で，それだけに，私としては思い入れがあります．次の論文がそれです.

Y. Matsumoto, On the bounding genus of homology 3-spheres, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA. Math., 29, 1982, 287–318.

この予想と私の関わりについて少し説明させていただきます.

4 次元トポロジーにゲージ理論が導入される以前の 1980 年まで話を戻します．それは，θ_3^H は $\mathbb{Z}_2$ かも知れない，という「乱暴な予想」すら否定されていない頃のことです．もし，「乱暴な予想」が正しければ，$\rho(\Sigma)=0$ を満たすようなホモロジー 3 球面 Σ は，S^3 とホモロジー同境(前節で定義しました)になることになります．つまり，Σ と S^3 の二つを境界にするコンパクトで滑らかな 4 次元多様体 W で，$H_*(W;\mathbb{Z}) \cong H_*(S^3;\mathbb{Z})$ を満たすものがあることになります．W の，S^3 のほうの境界に 4 次元円板 D^4 を張り付ければ，残ったほうの Σ を境界とするコンパクトで滑らかな 4 次元多様体 $V = W\cup D^4$ が得られますが，この V は次の性質を持ちます：

$$H_*(V;\mathbb{Z}) \cong H_*(D^4;\mathbb{Z})$$

すなわち，V は「ホモロジーの観点でみると D^4 のように見えるコンパクトで滑らかな 4 次元多様体」であることになります．このような 4 次元多様体を**ホモロジー 4 円板**とよぶことにしましょう．上の構成で分かることは，もし「乱暴な予想」が正しければ，$\rho(\Sigma)=0$ であるようなホモロジー 3 球面 Σ はあるホモロジー 4 円板 V の境界になる，ということです.

そこで，当時，ロホリン不変量が0であるようないろいろなホモロジー3球面について，それが実際に，あるホモロジー4円板の境界になるかどうかを調べる「実験的研究」が世界のいくつかのグループでなされました.

具体的なホモロジー3球面としては，互いに素な3つの自然数 p, q, r で決まる**ブリースコーン(Brieskorn)のホモロジー3球面** $\Sigma(p,q,r)$ というもの[5]が手頃な材料に使われました. 具体的な $\Sigma(p,q,r)$ が，あるホモロジー4円板(あるいは，もっと強く「可縮な」4次元多様体)の境界になることが分かると，それだけで論文が書けたくらいです.

方法としては，**カービー計算**(Kirby calculus)という4次元のハンドル体を直接扱う方法(4次元円板に2ハンドルが接着する「足」としての「枠付き絡み目」の絵を，いろいろと「職人的に」変形する方法)がほとんど唯一の手段でした.

まず，$\rho(\Sigma)=0$ であるような具体的なホモロジー3球面をひとつ選ぶ. 次に，その Σ を境界にする4次元ハンドル体 V で，$H_1(V;\mathbb{Z})=\{0\}$ であるようなものをみつける. V はスピン構造をもち，しかも符号数が0であるように取れる. そうすると，V の交点形式[6]は

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

という格好をしている. そこで，ここに現れた $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ の個数を減らしてゆくことを考えるのです. 実際には，カービー計算でハンドル体 V の表示を変形して，その中にうまい2次元球面が見つかればそれを手術で切り取って，というような操作[7]を続けて行きます. うまいこと全ての $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ が取り除ければ，得られたハンドル体 V' はホモロジー4円板になっています. したがって，始めに取った Σ はホモロジー4円板 V' の境界になることが証明できたことになります.

この一般的手順は，言うは易く行うは難しであって，複雑な絡み目を職人技で変形して行くのは本当に難しい. 私も挑戦してみましたが，一つも成功しませんでした. $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ の数をある程度は減らして行けるが，$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ を全て取り除くことはなかなかできない.

こういうことを試みているうちに，何らかの Σ がホモロジー4円板の境界になることが示せないと，全然論文が書けない，という状況もなんだかおかしな気がしてきました.

あの「乱暴な予想」が正しければ，$\rho(\Sigma)=0$ であるような Σ から出発する限り，全ての $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ が取り除けるわけですが，もし「乱暴な予想」が正しくなければ，どこかで，それ以上 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ の個数が減らせない限度が必ずあるはずです. こう考えると，「乱暴な予想」が正しい

5） $\Sigma(p,q,r)$ は次の式で定義されます. ただし，$\mathbb{C}$ は複素数平面です.

$$\Sigma(p,q,r)=\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3 \mid z_1^p+z_2^q+z_3^r=0,\ |z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=1\}$$

6） 交点形式についてはこの本の142ページと200ページに説明してあります.

7） このような操作では，ハンドル体の境界は Σ のままで変わりません.

か正しくないかは別として，ある Σ を境界とするハンドル体のなかの $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の個数を「何個まで減らすことに成功した」という事実も結果として残しておいたほうがよいのではないか，と思いました．そういう論文を書いておけば，後でそれを読んだ人が，「ではもうひとつ減らしてみよう」という気になるかも知れない．そうすれば，いろいろな人の努力や経験の蓄積が可能になると思いました．

このような考えから，上記の論文(On the bounding genus…)で，ホモロジー 3 球面 Σ の "**bounding genus**" という不変量 $|\Sigma|$ を導入しました．$|\Sigma|$ の定義は次のとおりです．

もし，$\rho(\Sigma)=0$ であれば，Σ を境界とするコンパクトで滑らかな 4 次元多様体[8] V で，その交点形式が $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の直和となるものがあります．そのような V のうちで，$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の個数が最小のものを考える．そのような V に含まれる $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の個数を $|\Sigma|$ と定義するのです．また，$\rho(\Sigma)=1$ であれば，そのような V は存在しないので，$|\Sigma|=+\infty$ とおきます．

Bounding genus はホモロジー 3 球面の群 θ_3^H から $\{0,1,2,\cdots\}\cup\{+\infty\}$ への写像

$$\begin{aligned} \theta_3^H &\to \{0,1,2,\cdots\}\cup\{+\infty\} \\ \Sigma &\mapsto |\Sigma| \end{aligned}$$

を与えることになります．

もちろん，「乱暴な予想」が正しければ，$|\Sigma|=+\infty$ か，さもなければ $|\Sigma|=0$ なので，$|\Sigma|$ は実につまらない不変量になります．そして，こんなつまらない不変量 $|\Sigma|$ を導入した筆者はもの笑いになるでしょう．ところが，もし「乱暴な予想」が正しくなければ，がぜん $|\Sigma|$ は意味のある不変量になります．しかも，任意の二つのホモロジー球面 Σ_1, Σ_2 について，

$$|\Sigma_1 \# \Sigma_2| \leqq |\Sigma_1|+|\Sigma_2|$$

が成り立つので，Σ_1 と Σ_2 の間の「距離」が

$$|\Sigma_1-\Sigma_2|$$

とおいて定義できることになります[9]．θ_3^H は，$+\infty$ という距離も許す一種の「距離空間」になるわけです．このように，$|\Sigma|$ の価値は「乱暴な予想」の成否にかかっていて，しかも「乱暴な予想」は未解決だったのですから，bounding genus $|\Sigma|$ の導入は一種の「賭け」みたいなものでした[10]．

でも，とにかく，bounding genus の定義と，いろいろなホモロジー 3 球面についての bounding genus の上からの評価をまとめて，論文にしました．それが上記の論文です．

評価の例として，たとえば，つぎのようなものを挙げておきました．

8） いちいち断りませんが，以後，考える 4 次元多様体はすべて，整係数の 1 次元ホモロジー群 H_1 が $\{0\}$ であると仮定します．

9） ここに，$\Sigma_1-\Sigma_2$ は，Σ_1 と，Σ_2 の向きを反対にした $-\Sigma_2$ との連結和 $\Sigma_1\#(-\Sigma_2)$ の略記です．

10） Bounding genus を思いついたころ，東京大学の「トポロジー火曜セミナー」で話をさせてもらいました．そのときの講演タイトルを "On a risky invariant of homology 3-spheres" としたので，その表題を見た他の分野の先生から，「この risky invariant とは何かね」と聞かれたことを思い出します．

$$|\Sigma(2,3,12m-1)| \leqq 1, \quad m \text{ は任意の自然数}$$
$$|\Sigma(2,7,14m-1)| \leqq 3, \quad m \text{ は1以上の奇数.}$$

上で説明したように，これらの $|\Sigma| \leqq k$ という評価は，**ホモロジー3球面 Σ を境界とする滑らかなコンパクト4次元多様体 V で，その交点形式が $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を k 個直和した形であるようなものがあることを確認した**というメッセージなのです．(書いていて，少し面倒になりましたので，以下，$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のことを記号 U で表わさせてください．また，U の k 個の直和を kU と書くことにします．)

さて，このような評価 $|\Sigma| \leqq k$ を改良していく話ですが，カービー計算などの方法で，もっと小さな kU をもつ V を探そうとしても，それがなかなか成功しないことが，しばしば経験されます．つまり，$|\Sigma| \leqq k$ という評価を $|\Sigma| \leqq k-1$ という評価に改良しようとしても，それがなかなかできない，もしかすると不可能かもしれない，という状況です．

私がそのとき感じたのは「何か未知のエネルギーによって，$|\Sigma|$ が0にならないように，下から支えられている」という物理的なイメージでした．このイメージはもちろん，「乱暴な予想」は成り立つはずがない，という気分も含んでいます．

改良の難しい例に次のものがあります．たとえば，有名な「ポアンカレのホモロジー3球面」は $\Sigma(2,3,5)$ というブリースコーンのホモロジー3球面と同じものですが，この bounding genus は $|\Sigma(2,3,5)| = +\infty$ です．ところが，これの二つを連結和して得られるホモロジー3球面 $2\Sigma(2,3,5)$ $(=\Sigma(2,3,5)\#\Sigma(2,3,5))$ の bounding genus は有限で，

$$|\Sigma(2,3,5)| \leqq 3 \tag{1}$$

となります．これを

$$|\Sigma(2,3,5)| \leqq 2 \tag{2}$$

に改良するのは，至難の技です．というのは，(1)から分かるように，$2\Sigma(2,3,5)$ は $3U$ という交点形式をもつコンパクトな4次元多様体 V の境界になっていますが，別途，議論すると，$2\Sigma(2,3,5)$ が $E_8 \oplus E_8$ という交点形式をもつコンパクト4次元多様体 W の境界にもなっていることが分かります．もし，不等式(1)が(2)のように改良されたとすると，それは $2\Sigma(2,3,5)$ が $2U$ という交点形式をもつようなある V' の境界になることを意味するので，その V' と W を共通の境界 $2\Sigma(2,3,5)$ に沿って貼り合わせると，

$$E_8 \oplus E_8 \oplus 2U \tag{3}$$

という交点形式をもつような滑らかで閉じた4次元多様体 M (まえの脚注8で述べた暗黙の仮定から，$H_1(M;\mathbb{Z}) = \{0\}$ となっています)が構成されることになります．この M はスピン構造をもつことも容易に分かります．このような4次元多様体の存在問題は，ロホリンの昔(1950年代)から，その当時(1980年)までに約30年間も考えられて来た(当時の)未解決問題だったので，ちょっとやそっとで構成できるわけはなかったのです．ということは，(1)の評価を(2)に改良することは極めて難しいことになります．このように改良の難しい(もしか

すると改良不可能な)評価を**臨界的評価**と名づけました．(1)は臨界的評価です．

その当時まで，約 30 年間考えられてきた(当時の)未解決問題といいましたが，正確には，次のような問題です．有名な $K3$ 曲面はスピン構造をもつ滑らかな単連結閉多様体で

$$E_8 \oplus E_8 \oplus 3U \tag{4}$$

という交点形式を持ちます．この交点形式のなかの $3U$ という部分は，符号数 $\mathrm{sign}(K3) = -16$ にぜんぜん寄与せず，一見「無駄に」見えることから，この $3U$ という部分を適当に($K3$ 曲面に「手術」を施すことによって)切り取って，$2U$ とか U に減らせないか．これが，ロホリンのころから考えられて来た(当時の)未解決問題です．しかし，誰も U の切り取りには成功しなかったのです．ですから，この $3U$ は減らせないのだ，というのが 4 次元多様体論としては自然であろうと，(まだ証明されていなかったものの)当時，うすうす感じられていました．この本の座談会でも 181 ページで話題になっています．

「臨界的評価」を定義した時点の私の気分は，「$K3$ は単連結だが，たとえ探索の範囲を非単連結な多様体に広げても，(3)のような交点形式をもつ滑らかな 4 次元スピン閉多様体は存在しないのだろう，そうすると，(1)を(2)に改良するのも不可能だろう」というものでした．「臨界的評価」は，「4 次元多様体論のありよう」が「エネルギー」となって $|\Sigma|$ を下から支えているように見えるぎりぎりの評価であるように思われました．

さて，もっと大きな $|\Sigma|$ の値について，それが「4 次元多様体論のありよう」によって「下支え」されていることがあるとしたら，それはどんな状況だろうと考えました．それを考えるうえで，導きとなったのは，$|\Sigma|$ が一種の「ノルム」のように振舞ってほしい，という希望です．すなわち，有限値の $|\Sigma|$ については

$$|n\Sigma| = n|\Sigma|$$

という式が(本当かどうかは分からないが)成り立ってほしい，いや，成り立つのが自然だ，と思いました．そうしますと，$|2\Sigma(2,3,5)| \leqq 3$ が臨界的評価なら，任意の自然数 n について

$$|2n\Sigma(2,3,5)| \leqq 3n \tag{5}$$

という評価も「臨界的評価」であるべきだということになります．任意の n について(5)の評価を「臨界的評価」とするような，4 次元多様体論のありようを考えてみると，$K3$ 曲面の n 個の連結和 $K3 \# K3 \# \cdots \# K3$(これを簡単に $nK3$ と書きます)の交点形式

$$nE_8 \oplus nE_8 \oplus 3nU$$

からは U をひとつも減らせない，という予想が得られます．いまはホモロジー 3 球面の群 θ_3^H について考えているので，すべてホモロジーの言葉で述べなくてはならず，また，必ずしも単連結と限らない 4 次元のスピン多様体も出てきます．そこで，少し，一般的化して上の予想を述べれば，「滑らかでスピン構造をもつ 4 次元閉多様体 M の符号数が $-16n$ であれば，その第 2 ベッチ数 b_2 は $22n$ 以上であろう」ということになります．($K3$ の符号数は -16 で，第 2 ベッチ数は 22 でした．) $16n$ と $22n$ の比をとれば 8：11 ですから，これから，11/8-予想に自然に行きつきます．

$K3$ の連結和の交点形式から U をひとつも切り取れないだろうと考え，そのホモロジカルな状況を，必ずしも単連結と限らない4次元スピン閉多様体のホモロジカルな特性と考えてみたこと，そして，符号数と第2ベッチ数の**比**をとって，11/8という係数を含む不等式の形に定式化したこと，などが私の「わずかばかりの貢献」でした．これらは，みな bounding genus のほうの都合から，ある意味では「必然的に」そうせざるを得なかったわけで，たとえば，「比をとる」という考えも，定式化されてみると，どうということもないのですが，bounding genus のほうの都合がなければ，私は符号数と第2ベッチ数の「比」をとるという（ちょっと不自然な）操作に気がつかなかったのではないかと思います．

ひどく個人的なことですが，私の誕生日は11月8日なので，11/8という比が出てきたときは，偶然の一致にちょっと驚き，うれしくなりました．

「11/8-予想」という名前は私が付けたわけではありません．だいたい，上に掲げた私の論文(1982)では，「予想」とすら言っていません．この論文の p. 289 の「臨界的評価」の定義に関連して，ごく間接的に述べただけです．その部分をなるべく忠実に日本語に訳してみます．

定義　ある評価 $|\Sigma| \leqq n$ が「臨界的評価」(あるいは「改良困難な評価」)であるとは，改良された評価 $|\Sigma| \leqq n-1$ から，閉じた，ホモロジカルに1-連結なII型の4次元多様体 M で，次の不等式

$$b_2(M) < (11/8)|\mathrm{sign}(M)| \qquad (*)$$

を満たすものの存在が帰結されることである．(係数11/8は $K3$ 曲面の連結和が等号を満たすように選ばれている．)

ここまでが定義です．この定義の中で，「ホモロジカルに1-連結である」と書いてあるのは，$H_1(M\,;\mathbb{Z}) = \{0\}$ であるということです．また，II型であることの定義はこの本の157ページにあります．ホモロジカルに1-連結で，II型であるような4次元閉多様体はスピン多様体です[11]．

この定義のすぐあとで，次のように書いてしまいました．

「このような(不等式(*)を満たし，ホモロジカルに1-連結でII型の)4次元閉多様体は永いこと探索されてきたが，その存在は未だ知られていない．だから「改良困難な評価」という．」

この部分が11/8-予想の内容を説明したところといっても良いのですが，今にして思えば，その述べ方は極めて雑です．書いたときに念頭にあったのは，$n=1$ という特別な場合($K3$ から U をひとつも切り取れないという予想)です．その場合は確かにロホリンの時代からの問題だったわけですから，そう書いたのですが，上の書き方では，「$K3$ から U を切り取れないだろう」という昔からの予想と，「$K3$ の連結和からも U を切り取れないだろう」という

11）ただし，私のオリジナル・バージョンでは，$H_1(M\,;\mathbb{Z}) = \{0\}$ を仮定しているので，H_1 について何の仮定もない現行の11/8-予想よりは，多少「弱い」形になっています．

「新しい部分」の区別が全くつきません．まるで「昔から n 個の連結和のホモロジカルな状況が問題にされていた」かのように読める（言いかえれば，昔から 11/8-予想が問題にされていたように読める）ので，私自身の「わずかばかりの貢献」を自分から否定してしまった感があります．（**比**をとって，n を**消去した形**にしてしまったので，$n=1$ の場合と $n \geqq 2$ の区別を表現できなかったとも言えます．） そもそも，このような「簡単な思いつき」が，あとで 4 次元多様体論の中心的な予想になろうとは全然予期していたなかったので，こういういい加減な書き方をしてしまいました．もっと，慎重な書き方をすべきだったと今になって悔やんでいますが，後の祭りです．

Bounding genus の「臨界的評価」を定義するのに一番ぴったりするものとして 11/8-不等式を書き，それがたまたま「世界で初めて」だったので，11/8-予想に（主観的に）関わるようになってしまっただけ，といえばそれだけなのです．もちろん，当時は数学的に深いところまで見ていたわけではありません．ひょんなことから 11/8-不等式を思いついて，それからの 30 年は，何とはなしに，11/8-不等式を意識して過ごしてきました．それで分かったことは，「予想」というものは，初めて書き下したときの思惑なんかとは全く別に一人歩きして，それ自身が「成長」して行くものなのだ，ということです．（でも，11/8-不等式が，私なんかとは無関係に「成長」していって，4 次元多様体論の深いところと関係するようになっていくのを見るのは，なんだか，貧しい親が，立派になったわが子の活躍ぶりを見ているような気がして，幸せでした．） とくに，前々節に述べたように，1995 年前後に明治大学で古田幹雄氏が彼の 5/4-不等式の証明について話すのを聞いた時は，11/8-予想がまともに議論される時代が来たのだと思って，感動を覚えました．

●予想の先取権？

11/8-不等式が他人の論文に登場するのを見たのは，次の論文が初めてでした．また，「11/8-予想」という名前が付けられているのを知ったのも，この論文でした．

R. Friedman and J. W. Morgan, Algebraic surfaces and 4-manifolds: some conjectures and speculations, Bull. Amer. Math. Soc., 18, 1988, 1–19.

しかし，そこでは，「この予想はカス（Kas）とカービーとによる」と書かれていました（p. 16）ので，「へぇー，アメリカではカスとカービーの予想ということになっているのか」と思いました．しかし，「本当は，私のほうが先に定式化したんだ」という秘かな誇りは変わりませんでした．その理由はいくつかあります．

● 私は 1976 年から 1978 年夏までプリンストンの研究所にいて，そこには 4 次元に関心のあるトポロジストが集まっていましたが，私も含めて，誰もこの予想に思い至らず，全く話題になっていなかったことです．「11/8-予想の歴史」は 1978 年の夏以前にはさかのぼれないのです．

● このことを示す証拠としては，1978年に出版されたカービーの低次元トポロジーの問題集(旧版)があります：

R. C. Kirby, Problems in low dimensional manifold theory, in Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 32, 1978, 273-312.

この問題集には，11/8-予想など出ていません．問題4.1に「単連結で閉じた4次元多様体の交点形式としてどんなものが出てくるか」という一般的な問題がでています．この問題は，ロホリンの時代にさかのぼる基本的問題意識です．しかし，この問題の直後に書いてあるリマークを読むと，当時は，この問題について何らかの一般的な予想を立てることはできなかったことが分かります．「$K3$曲面をたくさん連結和したらどうなるか」という発想もありません．

● 旧版の『4次元のトポロジー』巻末の座談会でも，$K3$曲面から「余分な」Uを切り取ることが話題になっています．この再々発行された『4次元のトポロジー』にも採録されています．この本の181ページ付近をお読みになれば，この座談会の行われた1979年でも，「$K3$曲面のn個の**連結和**から，ひとつでもUが切り取れるか」という問題は出席者の念頭になかったことが分かると思います．$n=1$のときすら未解決なのに，一般のnの場合を問題にしても全く無意味，という状況だったのです．

● 私がこの11/8-不等式を思いついたのは結構早い時期で，1980年10月には，この不等式を含む簡単なメモのような「報告[12)]」(bounding genusに関するもの)を書いて，スターン(R. Stern)に航空便で送っています．ですから，私より早く11/8-予想について述べた人がいれば，それは，1979年以後，1980年の10月以前でなければならないはずです．

● ところが，1978年の夏頃から，フリードマンが4次元位相多様体に関する目覚ましい結果を発表しはじめ，多くの人の目がそちらに向いていきました．とくに，1981年にカービーに会ったときには，「フリードマンの理論を勉強している」と言っていました．4次元位相多様体については11/8-予想は成立しないので，4次元位相多様体をいくら考えても，11/8-予想を提出する動機は生まれません．

● さらにいえば，ドナルドソンが$n=1$の場合を証明したのは1985年になってからで，次の論文で発表されました[13)]．

S. K. Donaldson, Connections, cohomology and the intersection forms of four manifolds,

---

12)　On the bounding genus of homology 3-spheres —preliminary report—, October, 1980.

13)　この論文では，(3)のような交点形式をもつような，滑らかで閉じた4次元多様体Mでスピン構造をもつものは存在しないことが証明されています．この結果から，bounding genusについての次の結論が得られます．

$$|2\Sigma(2,3,5)|=3$$

(1)の評価を(2)の評価に改良することは確かに不可能だったわけです．11/8-予想が正しければ，一般のnについても(5)の評価は実は＝です．

J. Diff. Geom., 24, 1986, 275-341.

実際，私は1985年にバークレイのMSRIという研究所で開かれたシンポジウムで，ドナルドソンがこの結果を発表するのを聞いていましたが，ロホリンの昔からある問題(すなわち，$K3$からはUが1個も切り取れないという予想)を解いた，ということで聴衆が感心していました．このドナルドソンの結果のあとでは，一般にn個の連結和を考えて11/8-予想を提出する人がでても全然不思議ではありません．

● 1986年に，小島定吉氏と根上生也氏が共同で，低次元トポロジーの問題集を編集して，翌年，川久保勝夫先生の科研費で冊子[14]として出版しています：

問題集「低次元トポロジーとその周辺」，小島定吉・根上生也編，昭和61年科学研究費補助金(総合研究A)課題番：61302004，研究代表者：川久保勝夫．

私自身もこの機会に11/8-不等式を宣伝すべく，問題提起をしています．70番目の問題として(英語まじりの文なので，日本語に直して再録しますと)

問題70. $b_2(M) < \dfrac{11}{8}|\mathrm{sign}(M)|$を満たす単連結で閉じた4次元スピン多様体は存在するか？（松本幸夫　東京大学）

《注意》 $|\mathrm{sign}(M)| = 16$のときはドナルドソン(S. Donaldson: Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds, to appear in J. Diff. Geom.)によりそのようなMは存在しないことが示されている．

と書いてあります．いまから読むと，この問題は勇み足の気味があり，Mが滑らかであるという仮定をちゃんと書いていないので，字面だけからすると反例があります．また，問題のイメージを単純にするため，Mを単連結としていますが，これでは，問題に引用されているドナルドソンの論文の中によく知られた予想として書かれている「滑らかで単連結な4次元スピン閉多様体のホモトピー型は$K3$のいくつかと$S^2\times S^2$のいくつかの連結和で与えられるだろう」という予想と問題70とは内容的に全く同じことになってしまいます．(ところで，ドナルドソン革命を経験した1985年当時には，「$K3$曲面の連結和からはUをひとつも切り取れないだろう」という予想はもはや常識になっていたのですね．）しかし，これをオリジナルな問題として提起してしまったほど，この時点になっても，11/8-不等式はそんなに知られていなかったことが分かります．まだフリードマン-モーガンの前掲論文(1988)が出る前だったので，私は11/8-不等式が他人の論文に書かれているのを見たことがありませんでし

14) この冊子と，数理研講究録568のなかの「Hyperbolic Geometry and 3-manifolds 問題集」(松元重則・坪井俊・矢野公一編)を合わせ，さらに新しい問題を集めて編集された「低次元トポロジー問題集」(北野晃朗・合田洋編)が森田茂之氏の科研費(基盤研究A)により1996年に出版されました．問題70はこの問題集の問題6.15として再録されています．

た.（この冊子は，私が紛失してしまったものでしたが，小島定吉氏と作間誠氏が探し出して，送ってくださいました．両氏のご厚意に感謝いたします．）

● もうひとつ思い出したことは，11/8-不等式を思いついた直後，まだ東京大学の理学部に所属していたころでしたが，複素曲面では 11/8-不等式は成り立つのだろうか，と思って，確か数学教室の会食のときだったかに，隣に座っていた飯高茂氏に尋ねてみました．飯高氏はちょこちょこっと計算してくれて，「複素曲面では成り立つ」と保証してくれましたので，ちょっと安心しました．

● 私の上記論文(1982)は，実は 1981 年に，アメリカの某雑誌に投稿して，reject されました．「研究集会の報告集に載せるのなら，よいレポートであるが，研究論文としては認めがたい」という理由だったと記憶します．確かに，ゲージ理論導入以前では，bounding genus が本当に 0 と $+\infty$ 以外の値をとるという保証は全然なかったわけで，単にその評価しか書いていない論文は，私がレフェリーでも断る気がします．しかし，もしレフェリーが日本人でなかったら(その可能性は高いと思いますが)，このとき 11/8-不等式は，レフェリーをしてくれたアメリカ人か，ヨーロッパ人の目にとまったと思います．

11/8-予想は定式化されればあまりに自然な(というか，当たり前の)予想なので，誰でも気がつきそうな予想に思われます．私もそう思います．とくに，現在の理論的な水準で考えれば，ますますそう見えます．でも，「たかが予想，されど予想」なのです．どんな予想だって，ある歴史のなかで予想されたものなので，単に「予想の字面」だけを歴史性から切り離して議論しても仕方がないと思います．

定理の先取権ならともかく，「予想の先取権」を争うのはみっともないと感じたので，ごく最近まで，あまり声高に主張しなかったのですが，次の本の文献案内を見て，「それはないよ」という気になってしまいました．それからは，「この予想は自分が初めて定式化した」と，なるべく積極的に主張しようと思うようになりました．

A. Scorpan, The Wild World of 4-Manifolds, Amer. Math. Soc., 2005.

この本の 266 ページに，次のように書かれています：

「11/8-予想は，トポロジーのコミュニティーでしばらくの間流布したのち，松本によって初めて書き下された[15]．」 これでは，私は誰かが思いついた予想を単に書きとどめただけ，ということになります．(何だか，活躍中の子供について，「あれはお前の子ではないよ」と言われたような気がしました．） このように当時の様子を述べている著者(Scorpan 氏)の生まれた年を見てみると，なんと 1974 年でした．ということは，私が短いメモをスターンに送った 1980 年には 6 歳だったことになります！ 著者の年齢までもちだすのは少々ルール違反

15） 原文は，The 11/8-conjecture was first written down in(by の間違い？) Y. Matsumoto in *On the bounding genus of homology 3-spheres* after having floated around in the topological community for some time.

の気味はありますが，しかし，「君ねえ，当時の様子を分かって書いてるの？」と言いたくもなろうというものです．

上に，n 個の $K3$ 曲面の連結和のホモロジカルな状況を問題にしたという「わずかばかりの貢献」を自ら否定するようないい加減な書き方をしてしまった，と述べましたが，そのいい加減さが後になってこういう混乱の原因になったのかも知れません．そうだとすると，Scorpan 氏にこんな風に書かれるのも，自業自得というものです．

11/8-予想への個人的な「思い入れ」のために，ながながと書いてしまいました．他の人にはどうでもよいことかも知れませんが，この機会に，11/8-不等式を思いついた前後の事情を書いておきたいと思ったものですから，読者の迷惑を顧みず書きました．ご容赦ください．

● Bounding genus のその後

Bounding genus $|\Sigma|$ が 0 と $+\infty$ 以外の値をとることがある，ということが確定したのは，「ドナルドソンの定理」がでたとき(1983 年)で，ドナルドソンの定理によれば，

$$0 < |2\Sigma(2,3,5)| \leqq 3$$

であることが分かります．また，次のフィントュシェルとスターンの論文

R. Fintushel and R. J. Stern, Pseudo-free orbifolds, Ann. Math., 122, 1985, 335–364.

のなかで，$\Sigma(2,3,12m-1)$ というブリースコーンのホモロジー 3 球面はホモロジー 4 円板の境界にならないことが証明されました．そのことと，私の論文(1982)に例示してある評価 $|\Sigma(2,3,12m-1)| \leqq 1$ から直ぐに

$$|\Sigma(2,3,12m-1)| = 1$$

であることが，全ての自然数 m について確定します．また，ごく最近，福本善洋氏は，

$$|\Sigma(2,7,14m-1)| = 3$$

が全ての正の奇数 m について成り立つことを主張し，また，bounding genus の概念を二つの 3 次元多様体を結ぶ同境についての不変量として一般化しました：

福本善洋，Bounding genus と 3 次元多様体の同境圏，日本数学会，2009 年度秋季総合分科会，トポロジー分科会講演アブストラクト 36(大阪大学)．

カービーは彼の低次元トポロジーの問題集(新版)のなかの問題 4.2 のリマークのなかで，bounding genus を **hyperbolic genus** という名前で紹介してくれました．この名前は，「何か新しい問題はないか」と聞かれたとき，bounding genus を計算する問題をカービーに送って，そのとき，“bouding genus” というのは何だか英語としておかしな言葉のように思ったので，“hyperbolic genus” という名前のほうがいいかも知れないといったら，彼がそちらを採用したものです[16]．

16） 前にでてきた $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のことを “hyperbolic plane” と呼ぶことがあるので，この個数を問題にする不変量 $|\Sigma|$ を “hyperbolic genus” と呼んでみました．なかなか良い名前だと思います．

R. Kirby, Problems in low-dimensional topology, in Geometric Topology, Part 2, ed. by W. H. Kazez, Studies in Advanced Mathematics, Amer. Math. Soc./ International Press, 1997.

ただし，$|\Sigma| = +\infty$ に相当する場合には，「E_8 をひとつ付け加えて有限な値にする」という彼自身による(ちょっと不自然な)修正を加えた紹介になっています．

Bounding genus (hyperbolic genus)も，簡単で，割と自然な思いつきだと思われますので，これについての研究も増えてくれたらいいと思います[17]．前節で述べたように，bounding genus の値は「4次元多様体論のありよう」によって下支えされているものなので，bounding genus を使って θ_3^H の距離空間としての構造を明らかにするのは，「4次元多様体論のありよう」をホモロジー3球面のなす群のなかに描くことであるともいえると思います．

●レフシェツ・ファイバー空間とシンプレクティック多様体

レフシェツは代数曲面(複素曲面ですから4次元多様体です)を研究するために1920年代に「ペンシル」とよばれる構造を導入しました：

S. Lefschetz, L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthier-Villars, 1930.

ある有限個の点で代数曲面をブロウ・アップすると，ペンシルの構造を「レフシェツ・ファイバー空間」の構造に直すことができます．ですから，代数曲面は，それをいくつかの点でブロウ・アップすると，レフシェツ・ファイバー空間の構造をもつようになります．

定義　コンパクトで向きのついた4次元多様体 M が，コンパクトで向きのついた2次元多様体 B 上の**レフシェツ・ファイバー空間**であるというのは，M から B への C^∞ 級の全射 $f: M \to B$ があって，次の3条件が満たされることである：

（1）　$f^{-1}(\partial B) = \partial M$．ただし，$\partial B, \partial M$ は，それぞれ，B と M の境界を表す．

（2）　M の内部に有限個の点 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ があり，f は $\{p_1, p_2, \cdots, p_s\}$ 上で単射であって，$f|(M-\{f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2), \cdots, f^{-1}(b_s)\}) : M-\{f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2), \cdots, f^{-1}(b_s)\} \to B-\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$ は C^∞ 級のファイバー・バンドルである．ここに，$b_i = f(p_i)$，$i = 1, 2, \cdots, s$．また，このバンドルのファイバーは種数 g の閉曲面．

（3）　各 i につき，p_i のまわりでの2次元の局所複素座標系 (z_1, z_2) と b_i のまわりでの1次元の局所複素座標系 (ξ) をうまく選ぶと，f は局所的に $\xi = f(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$ と書ける．

B の点 p がどの b_i にも一致しないとき，$f^{-1}(p)$ を**一般ファイバー**とよび，$f^{-1}(b_i)$ を**特異**

17）　例えば，次のような問題はいかがでしょう．Bounding genus に関する1982年の前掲論文のなかで

$$|\Sigma(p, q, pqm-1)| \leqq \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

という不等式をすべての正の奇数 p, q, m について証明しました(Prop. 4. 4(ii))．ただし，p, q は互いに素であるとします．この不等式は実は等式である，ということがひょっとして成り立つのではなかろうか，と思うのですが，本当でしょうか．

ファイバーとよびます．一般ファイバーの種数が g であることを強調して，$f : M \to B$ を**種数** g **のレフシェツ・ファイバー空間**ということもあります．

レフシェツ・ファイバー空間は，(a) 代数曲面(をブロウ・アップしたもの)という滑らかで閉じた 4 次元多様体の豊富な具体例を取り込んでいること(実際，滑らかで閉じた 4 次元多様体を「人工的に」構成するのはとても難しい作業です)，(b) 特異ファイバーを許すものの，ファイバー・バンドルに近い構造をもち，「大域的モノドロミー」を通じて「**写像類群**[18]」Γ_g と密接に関連すること，(c) したがって，4 次元多様体にしては，トポロジーからの接近が比較的容易であること，などの理由のために，すでに何人かの研究者によって取り上げられていました．たとえば，

B. Moishezon, Complex surfaces and connected sums of complex projective planes, Lecture Notes in Math., 630, Springer-Verlag, 1977.

N. Chakiris, The monodromy of genus two pencils, dissertation, Columbia U., 1978.

J. Harer, Pencils of curves in 4-manifolds, dissertation, U. C. B., 1979.

A. Kas, On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration, Pacific J. Math., 89, 1980, 89-104.

などの論文があります．私も，この本の「12 年後のあとがき」のなかで，楕円曲面の微分同相類を考えたと書きましたが，それは種数 1 のレフシェツ・ファイバー空間のトポロジーに相当します．1990 年前後から，種数 2 以上のレフシェツ・ファイバー空間の微分同相類を決定したいと思って，いろいろと考えました．最終的な結論には至らなかったものの，いくつかの基本的な命題と面白そうな例が得られましたので，次の論文に発表しました．

Y. Matsumoto, Lefshetz fibrations of genus two —A topological approach—, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on “Topology and Teichmüller spaces”, ed. by Sadayoshi Kojima et al., World Scientific Publ. Co., 1996, 123-148.

ところが，ちょうどこの論文を発表したころ(1996 年前後)，ドナルドソンとゴンプが，レフシェツ・ファイバー空間とシンプレクティック多様体の関係を発見しました．すなわち，ゴンプにより，種数 2 以上のレフシェツ・ファイバー空間 $f : M \to B$ の全空間 M にはシンプレクティック多様体の構造が入ることが証明され，次の教科書のなかで結果が述べられました．

R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, 4-Manifolds and Kirby Calculus, Graduate Studies in Mathematics, 20, Amer. Math. Soc., 1999.

また，ドナルドソンは，逆にシンプレクティック多様体にはレフシェツ・ペンシルの構造

18) 向きづけられた種数 g の閉曲面 Σ_g の**写像類群** Γ_g とは，Σ_g からそれ自身への，向きを保つ同相写像 $h : \Sigma_g \to \Sigma_g$ の全体のなす群を，恒等写像 $\mathrm{id} : \Sigma_g \to \Sigma_g$ にアイソトピック(連続変形可能)な同相写像のなす部分群で割って得られる剰余群のことです．

が入り，したがって，それをブロウ・アップしてやると，レフシェツ・ファイバー空間の構造が入ることを証明しました：

S. K. Donaldson, Lefschetz pencils on symplectic manifolds, J. Diff. Geom., 53, 1999, 257-315.

シンプレクティック多様体はワインシュタインやグロモフにより，つとにその重要性が指摘されていたもので，代数多様体(というかケーラー多様体)の「良いところだけ」を C^∞ 級多様体に移植したような構造なので，微分幾何やトポロジーで活発な研究がなされる土台みたいなものでした．ゴンプの結果とドナルドソンの結果を合わせると，4次元シンプレクティック多様体の範囲とレフシェツ・ファイバー空間の構造をもつ4次元多様体の範囲がほぼ重なることが分かるわけで[19]，レフシェツ・ファイバー空間は4次元シンプレクティック多様体の「下部構造」のようなものだと言えます．こうして，90年代から2000年代にかけて，レフシェツ・ファイバー空間の研究が非常に活発に行われました．そのブームの「おこぼれ」にあずかって，私の上記論文も結構引用されたのはありがたかったです．

私はこの論文のなかで，種数が2以下のレフシェツ・ファイバー空間では，全空間 M が閉じた4次元多様体だと，その符号数が特異ファイバーの上に「分数値の符号数」として集中しているようにみえるという現象を指摘しました．後に，これは「局所符号数」とよばれるようになり，多くの研究者によって詳しく研究されました．一番早く取り上げてくれたのは，遠藤久顕氏です．遠藤氏は局所符号数を種数 g が一般の「超楕円的特異ファイバー」に拡張し，レフシェツ型の特異ファイバーについて具体的に計算しました．

H. Endo, Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations, Math. Ann., 316, 2000, 237-257.

足利正氏と荒川達也氏は，代数幾何的な観点から超楕円的特異ファイバーの「堀川指数」を考え，それを用いて「代数幾何的な局所符号数」を定義して具体的な計算をしました．

T. Arakawa and T. Ashikaga, Local splitting families of hyperelliptic pencils, I, Tohoku Math. J., 53, 2001, 369-394.

こうして，遠藤氏の「位相幾何的な局所符号数」と荒川氏と足利氏の「代数幾何的な局所符号数」が出来たわけですが，実はこの2種の局所符号数が等しいことが，上記の遠藤氏の論文の付録で，寺杣友秀氏により証明されました．こうして，局所符号数は位相幾何と代数幾何を結ぶ懸け橋のひとつになりました．

レフシェツ・ファイバー空間とは異なる観点で，佐伯修氏が別種の局所符号数について研究しています．佐伯氏は4次元多様体 M から3次元多様体への「安定写像」の特異ファイバー(1次元，または0次元です)を分類しました：

O. Saeki, Topology of Singular Fibers of Differentiable Maps, Lecture Notes in Math.,

19) 「重なる」と書かずに「ほぼ重なる」と書いたのは，ブロウ・アップする手間が介在するからです．

1854, 2004.

そして，山本卓宏氏との共同研究で，4 次元多様体 M が向きの付いた閉多様体のとき，M の符号数は，Ⅲ^8 と名づけられた 1 次元の特異ファイバーに集中していることを証明しました．閉じた 4 次元多様体を全空間とするいろいろなファイバー空間で，ある種の「特異ファイバー」に M の符号数が集中して乗っているように見える現象は，なかなか興味深いと思います：

O. Saeki and T. Yamamoto, Singular fibers of stable maps and signatures of 4-manifolds, Geom. Topology, 10, 2006, 359-399.

代数幾何的な局所符号数のところで紹介した荒川氏と足利氏の論文ですが，その題名に "local splitting family" という言葉があります．これについて説明します．

複素 2 次元の複素多様体 M から，複素数平面の単位円板 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ へのホロモルフィックな(複素数の意味で微分可能な)全射 $f : M \to \Delta$ があり，各点 $z \in \Delta$ の逆像 $f^{-1}(z)$ は常にコンパクトで，$z \neq 0$ のときは閉じたリーマン面になっているとします．原点の逆像 $f^{-1}(0)$ だけが「変な形の」特異ファイバーである可能性があるとします．このような $f : M \to \Delta$ のことを「リーマン面の退化族」とよびます．複素数 z をパラメーターとするリーマン面の族 $\Sigma(z)$ $(= f^{-1}(z))$ があって，$z \to 0$ のとき $\Sigma(z)$ がだんだん姿を変えて，特異ファイバー $\Sigma(0)$ に「退化」していくといったイメージです．

このような退化族 $f : M \to \Delta$ を全体として少し変形すると，別の退化族 $f' : M' \to \Delta$ が得られ，そのなかでは，原点以外の上にもいくつかの特異ファイバーがあり，それらの形は，はじめ原点の上にあった特異ファイバー $\Sigma(0)$ の形より「簡単に」なっているようにできることがあります．このとき，$f : M \to \Delta$ を少し「摂動」して，$\Sigma(0)$ をいくつかの，より簡単な特異ファイバーに分裂させたように見えますので，このような操作を "splitting" と呼んでいます．荒川-足利の論文ではこのことを研究しています．ある特異ファイバーを分裂させると，その特異ファイバーの持っていた局所符号数が，新しく生まれた複数の特異ファイバーに分配され，総和は変わりません．局所符号数の「保存則」があるわけで，ひょっとすると，素粒子が分裂するとき，電荷が保存されるような現象と，どこかでつながっているのではなかろうか，などと考えてしまいます．

特異ファイバーの "splitting" に関して，高村茂氏が精力的な研究を展開しています．同氏の論文のシリーズ I, II, III, IV, …の全ページ数は軽く 1000 ページを超えるのでは，と思われます：

S. Takamura, Towards the classification of atoms of degenerations, I, J. Math. Soc. Japan, 56, 2004, 115-145. II および IV はプレプリント．III, Lecture Notes in Math., 1886, Springer-Verlag, 2006.

リーマン面の退化族や局所符号数に関するサーベイとして，次の論説をご覧ください：

足利正，遠藤久顕，「リーマン面の退化族の諸相」，数学，第 56 巻第 1 号，2004，49-72.

レフシェッツ・ファイバー空間の完全分類については，種数1のときは，カス(1977)，モイシェゾン(1977)と私の結果(1986)がありますが，種数が2以上については，底空間 B が球面 S^2 の場合に限っても，結果はありません．底空間が球面で，ファイバーの構造が「超楕円的」であり，かつ全てのファイバーが「既約」な場合は，「そのようなレフシェッツ・ファイバー空間はいくつかの(具体的に与えられた)基本的レフシェッツ・ファイバー空間のファイバー和となるであろう」という**ジーベルト-ティアン(Siebert-Tian)予想**(2003)があります．種数が2の場合には，この基本的なレフシェッツ・ファイバー空間は，私の論文(1996)のなかの，例 A, C, D で与えたものになっているので，この予想を解くべく，結構がんばりましたが，写像類群の構造の複雑さに妨げられて，まだ解けません．鎌田聖一氏から，同氏の開発した「チャート」理論が役立つことを教えてもらい，この方向でもずいぶんがんばりましたが，未完成です．鎌田氏のチャートは「非可換モノドロミーの双対」と考えられるグラフで，次に述べる4次元空間のなかの曲面結び目で威力を発揮します．チャート理論の教科書として，鎌田氏自身による次の本があります：

S. Kamada, Braid and Knot theory in dimension four, Mathematical Surveys and Monographs, 95, Amer. Math. Soc., 2002.

チャートの複雑さそのものに果敢に切り込んで，理論的な筋道をつけるべく努力しているのが永瀬輝男氏と志摩亜希子氏の共同研究です．いろいろな結果を出されていますが，次のようなシリーズ論文があります：

T. Nagase and A. Shima, Properties of minimal charts and their applications, I, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 14, 2007, 69–97. II, Hiroshima Math. J., 39, 2009, 1–35. さらに，III-IVと続くようです．

レフシェッツ・ファイバー空間と密接に関連する「シンプレクティック多様体」の研究もすごい勢いで進んでいます．残念ながら，私にはほとんどついて行けません．申し訳程度ですが，シンプレクティック多様体の教科書をあげるだけにします．

D. McDuff and D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, Oxford Science Publications, 1998. reprint, 2003.

深谷賢治，シンプレクティック幾何学，岩波書店，2008.

●曲面結び目

「12年目のあとがき」の最後のほうで，「結び目理論の4次元版」について少し書きました．それは，古典的な結び目理論が3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた円周(またはその有限個の和)の位置を問題にするのに対し，4次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ に埋め込まれた2次元球面，あるいは閉曲面の位置を問題にする「曲面結び目理論」のことでした．それから今日までの約20年間に，曲面結び目理論は格段の進歩をとげました．ひとつひとつの成果を紹介することはできませんが，ここでは，「こんなことまで分かってしまった」と実感するひ

とつの結果として，球面結び目の３重点数に関する，佐藤進氏と志摩亜希子氏による定理を紹介します．

古典的な結び目は $\mathbb{R}^3$ に入っています．いま，$\mathbb{R}^3$ を xyz-空間と見て，z 座標を無視することで $\mathbb{R}^3$ から xy-平面 $\mathbb{R}^2$ への自然な射影 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を考え，この射影によって結び目を $\mathbb{R}^2$ に射影します．すると，平面 $\mathbb{R}^2$ に結び目の絵(平面に落とした「影」と言ってもいいです)が描けますが，その絵は，一般には自分自身と交わる閉曲線です．３次元空間の結び目を少し動かして，下にある結び目の絵の自己交差を２重点だけにすることができますが，上の結び目が真に結ばれた結び目で，そのタイプが変わらなければ，上の結び目をいくら動かしても，下の絵の２重点の個数を０にすることはできません．(もしできれば，上の結び目は自明な結び目であったことになります.）そこで，下の絵に含まれる２重点の最小数は，上の結び目のタイプで決まることになります．これは昔から考えられてきた「結び目の不変量」のひとつです．

全く同様に，$\mathbb{R}^4$ のなかの閉曲面結び目を自然な射影 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ により $\mathbb{R}^3$ に射影して，$\mathbb{R}^3$ のなかに閉曲面結び目の絵を描きます．この絵は $\mathbb{R}^3$ に「はめ込まれた」自己交差のある閉曲面になります．上にある曲面結び目を $\mathbb{R}^4$ のなかでいろいろと変形し動かして，下の $\mathbb{R}^3$ のなかの「はめ込み」(曲面結び目の３次元的な「絵」)に含まれる自己交差をなるべく簡単にすることを考えます．一般に，自己交差として，曲面の２つの部分が曲線にそって交わる「2 重線」が生じ，また，場合によっては，曲面の３つの部分が，ちょうど xyz-空間のなかで，xy-平面，yz-平面，xz-平面が交わるように交わって，原点に相当する「3 重点」を生じることもあります．上の曲面結び目が自明でなければ，$\mathbb{R}^4$ のなかで曲面結び目をいくら動かしても，２重線をなくすことはできません．３重点の個数のほうは，上の閉曲面を $\mathbb{R}^4$ のなかで動かすといろいろと変化しますが，その個数の最小値は上にある曲面結び目のタイプで決まります．このとき，佐藤-志摩の定理は次のように述べられます：

定理　$\mathbb{R}^4$ のなかの「3 葉結び目の２ツウィストスパン」とよばれる２次元球面の結び目を，$\mathbb{R}^3$ に射影したときの３重点の個数の最小値は４である．

$\mathbb{R}^4$ のなかにある「結ばれた球面」を自分自身と交わらずにいろいろ動かしてみる，といってもなかなか想像できません．まして，それを $\mathbb{R}^3$ に射影して，自己交差をもつ球面の「はめ込み」にして，そのはめ込みの３重点の個数の最小値を考える，ということは至難の技に思われます．ところが，曲面結び目理論の進歩によって，こんな個数の評価ができるようになっているのです．私は，この結果を聞いたときは本当に驚きました．佐藤-志摩の定理は曲面結び目の３重点の最小個数を決定した世界初の成果です．

佐藤-志摩の定理は次の論文に発表されました：

S. Satoh and A. Shima, The 2-twist-spun trefoil has the triple point number four, Trans. Amer. Math. Soc., 356, 2004, 1007-1024.

曲面結び目理論の進歩を支えたもののひとつが，**カンドル(quandle)**[20] という耳慣れない名前の代数系です．この代数系は 3 人の数学者により別々の名前で独立に定義されました．1980 年代のことです．その 3 人の論文を掲げます：

D. Joyce, A classifying invariant of knots, the knot quandle, J. Pure Appl. Algebra, 23, 1982, 37-65.

S. V. Matveev, Distributive groupoids in knot theory (in Russian), Mat. Sb. (N. S.), 119 (161), 1982, 78-88.

E. Brieskorn, Automorphic sets and singularities, Contemp. math., 78, 1988, 45-115.

カンドルは 2 項演算 $*$ を備えた代数系 $(X, *)$ です．次の 3 つの公理を満たします．

（i） 任意の $x \in X$ について，$x*x = x$.

（ii） 任意の $x, y \in X$ について，$z*y = x$ となる $z \in X$ がただひとつ存在する．

（iii） 任意の $x, y, z \in X$ について，$(x*y)*z = (x*z)*(y*z)$ が成り立つ．（右側自己分配法則）

この 3 つの公理は初めて聞くとなんだか変な法則に見えますが，古典的な結び目理論の "Reidemeister move" とよばれる変形操作にうまく対応していて，結び目理論に適合した代数系になっています．また，古典的結び目理論ばかりでなく，曲面結び目理論にも有効に使われるのも不思議な気がします．

さて，「群」にはホモロジー理論やコホモロジー理論がありますが，同様に，カンドルにも，ホモロジー理論やコホモロジー理論があります．

J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, and M. Saito, Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., 355, 2003, 3957-3989.

上述の佐藤-志摩の定理はカンドルのコホモロジーから来る不変量をうまく使ったものでした．（背景に，望月拓郎氏によるコホモロジーの計算があります．） このような理論的な道具がなければ，4 次元空間のなかに埋め込まれた球面の「結ばれ方」をちゃんと見るわけにはいきません．

カンドル・コホモロジーに関する 5 人共著の論文に出てくるカーターと斎藤(昌彦)氏は，10 数年以上にわたって，曲面結び目の共同研究を続け，曲面結び目理論の発展に貢献しました．また，別の共著者のひとり，鎌田聖一氏も同氏の開発した「2 次元ブレイド理論」と「チャート理論」によって曲面結び目理論の発展に貢献しました．この二つの理論が曲面結び目

20） 欧米人に聞いてみると，"quandle" という言葉は D. Joyce による造語のようです．こんな変な言葉はけしからんというようなことを言っているイギリス人もいました．しかし，曲面結び目理論の進歩に貢献したためか，この造語はトポロジーのコミュニティーで定着してしまいました．また，quandle という綴りからいえば，「クワンドル」とカナ書きするのがいいように思うのですが，いつしか「カンドル」という「威勢の良い」カナ書きが日本のトポロジー界で定着してしまいました．

理論の理論的な支柱を提供したことは間違いないと思います.

少し歴史的なことを書きますと，カンドルは1980年代に3人の数学者によって独立に導入された代数系だと述べました．しかし，本質的に同じ代数系が，何と1943年に(第2次世界大戦の最中です)日本人数学者の高崎光久氏によって，「圭」という名前で導入されていたのです.

高崎光久，対称変換ノ抽象化(圭ノ理論ノ序説)，東北数学雑誌，第49巻，1943，145-207.

高崎氏の「圭」は，カンドルよりも少し特殊で，公理(ii)の代わりに，次の

(ii)′ 任意の$x, y \in X$について，$(x*y)*y = x$が成り立つ

という公理を満たすものになっています．この(ii)′が成り立つと(ii)が成り立つことはすぐに確かめられますので,「圭」はカンドルの特別なものになっています．高崎氏は結び目とは関係なく，図形のもつ対称性に着目して「圭」の概念に行きあたりました．日本語で書かれていたため，世界的な認知度が低く，残念です．(最近は，高崎氏の先駆性を認め，“kei” という述語を提唱している外国人数学者もいます.)

高崎氏の論文最後の「結語」が感動的なので，ここに引用します．原文は漢字とカタカナですが，読みにくいのでひらがなに直しました．また，旧かなづかいを新かなづかいに直しました．(余計なことをする，と怒られるかも知れませんが….)

結語.

本稿は未だ文字通り序説に過ぎない．(中略)幾何学への仕上げも志さず，(中略)対称変換の抽象化としては公理系にもっと範疇性を与えるべきであったろうが，それも今後に譲った．実はそれを目ざして行く途中で最初にたずねあてた一集合である圭にひどく魅力を感じ，ひたすらそれの輪郭を追及することにだけ力が注がれたわけである．(中略)今後の研究については大方のご支援を得ねばならぬ．本稿の死活はかかって今後にある．もし本稿にして何等かの意義を記録し得たとするなら，それは只そういう展望へのいささか新しい視点を与えたことになるかも知れぬという一事だけである.

●ポアンカレ予想

21世紀になって，最も驚いたのはペレルマン(G. Perelman)による3次元ポアンカレ予想の解決でした．ペレルマンの仕事については，2002年12月にメキシコで開かれた低次元トポロジーのシンポジウムで噂を聞きましたが，ポアンカレ予想を解決したという論文は過去に数限りなくあったので，今度も間違いの可能性が高い，と考えていた人が多かったのではないかと思われます．噂を聞いたときも,「いまのところ，間違いは見つからないようだ」というコメントと一緒でした.

ところが，世界の数か所で，有力な数学者による検証作業が行われた結果，その正しさが

確認され，いくつかの「教科書」まで出版されるまでにいたりました．たとえば，

J. Morgan and G. Tian, Ricci flow and the Poincaré conjecture, Clay Mathematics Monographs, 3, 2007.（Amer. Math. Soc.）

日本語の解説書としては，次の本があります．

戸田正人，3 次元トポロジーの新展開 —— リッチフローとポアンカレ予想，臨時別冊・数理科学，SGC ライブラリ 57，サイエンス社，2007.

ポアンカレ予想は，「クレイ数学研究所」が世紀の 7 大問題のひとつとして 100 万ドルの賞金を懸けたことと，ペレルマンが 2006 年のマドリードで開かれた国際数学者会議において，授与されることになったフィールズ賞を拒否してしまったことなどから，ジャーナリスティックな興味も呼び起こしました．私個人の感想は「もったいない，貰っておけばいいのに」の一言に尽きますが…[21]．

ペレルマンの証明は，1982 年にハミルトン(R. Hamilton)によって提唱された方法，すなわち，3 次元多様体にリーマン計量を入れておき，「リッチ曲率」をいわば「動力」としてその計量を変形させる(「リッチフローで流す」)．そうすれば，最終的には，きれいな計量に収束するだろう，というかなり楽観的な予想に基づく方法です．私は，微分幾何の門外漢ですし，自分自身で彼の証明を検証したわけではないので，詳しいことは分かりませんが，ペレルマンは，いろいろな困難を克服しつつ，また必要なら修正を加えた上で，ハミルトンの方針をかなりのところをやり遂げました．そして，ポアンカレ予想のみでなく，サーストンの**幾何化予想**[22]も完全に証明してしまったようです．そのなかで，ポアンカレ予想が，いわば「泡」のような部分として，証明されてしまったことがとても印象的でした．サーストンが昔，「自分の予想に比べれば，ポアンカレ予想などチープな予想だ」と言ったとかいう噂を聞きましたが，実際にそういう感じがします．（しかし，繰り返しになりますが，「たかが予想，されど予想」です．歴史を考えれば，100 年間にわたって多様体のトポロジーの進歩を促し続けてきたポアンカレ予想は，やはり大予想であったに違いありません．）　ペレルマンの証明のなかで，塩谷隆氏と山口孝男氏の結果(ザイフェルト多様体の構造に関する部分)が使われたことは日本人としてうれしいことでした．

21）次の本は，関係者へのインタヴューを積み重ねて，ペレルマン自身の心情に迫った労作だと思います．

マーシャ・ガッセン，青木薫訳，完全なる証明，文藝春秋，2009.

ペレルマンの気迫と一途さが思いやられて，「貰っておけばいいのに」というような私の軽口など吹っ飛んでしまいます．でも，ガロワやグロタンディークの「悲劇」が連想されて，読後感には少しもの悲しいものがありました．

22）サーストンは，全ての 3 次元多様体は双曲幾何，球面幾何をはじめとする 8 種類の幾何構造のどれかひとつが入ったピースの集まりに分解されることを 1980 年前後に予想しました．これが幾何化予想とよばれる予想です．8 種類の幾何構造のうち，メインなものは双曲構造です．双曲幾何以外の構造をもつ部分は，リッチフローで流すと縮んでしまいます．

むかし，少し微分幾何を勉強したときには，リッチ曲率の重要性はよく分かりませんでした．しかし，ハミルトンやペレルマンの仕事をみると，リッチ曲率は本当に中心的な重要性を持つものだったのだな，ということが実感されました．今頃そんなことを言っている，と専門家には笑われそうですが，そういえば，アインシュタインの一般相対性理論のなかでも，リッチ曲率が重力場と等価なものとして現れたことを思い出します．

ポアンカレ予想は純粋にトポロジーの問題でした．しかし，トポロジーだけの方法では，結局解けなかったわけです．もう，トポロジーと微分幾何の違いを言っている時代ではなくなったのかも知れません．そのことも，すでに20年まえに，ゲージ理論が4次元トポロジーの主要問題を解決したときに(あるいは，もっと前，1970年代後半，サーストンの仕事が出たときに)気づくべきことだったのかも知れません．

4次元のエキゾチック球面が存在するかという問題は現在も未解決です．これも，トポロジーと微分幾何の総力をあげて解くべき問題なのだと思います．

ペレルマンの論文はネット上に掲載されています：

G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, http://arxiv.org/abs/math/0211159, 2002.

G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, http://arxiv.org/abs/math/0303109, 2003.

G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, http://arxiv.org/abs/math/0307245, 2003.

●4次元多様体との関係

ポアンカレ予想の解決は，4次元位相多様体の三角形分割問題にも影響します．なぜかというと，「12年後のあとがき」の213ページに掲げたフリードマンの有名な論文(1982)の系1.6に，「次のどちらかが成り立つ：ある閉じた4次元位相多様体$|E_8|$は単体的複体としても三角形分割されない．あるいは，3次元ポアンカレ予想は偽である」と書かれているからです．いまは，ポアンカレ予想が肯定的に証明されてしまったので，この2つの可能性は一つに絞れます．すなわち，その4次元位相多様体$|E_8|$は，(PL多様体への分割もできなければ)単体的な複体への三角形分割もできない位相多様体だということです．

「3次元ポアンカレ予想は正しい」という新たな知識を前提として，系1.6のフリードマンの証明を読めば，次のことが分かります．すなわち，4次元の位相多様体は，もしそれがPL多様体に分割できないのなら，単体的複体への分割もできないということです．

この本『4次元のトポロジー』の§10.4で，5次元PL多様体には分割できないが単体的複体には分割可能であるような5次元の閉じた位相多様体$X^4 \times S^1$の例を構成しましたが，そういう変な性質をもつ位相多様体が存在する最初の次元は5次元であることが判明したことになります．

ほんの少し書いて終わるつもりの「あとがき」があまりに長くなってしまいました．この辺でやめます．ここまで辛抱強くお付き合いくださった読者の方々に深く感謝いたします．

最後になりましたが，『4次元のトポロジー』の今回の再々発行に際し，大変お世話になった日本評論社の佐藤大器氏と飯野玲氏に心からお礼を申しあげます．

古の格言を引いて終わりにします．今の気持ちにこの言葉がぴったりですので．

TEMPUS FUGIT　(時は逃げ去る)

松本幸夫(東京にて，2009年10月23日)

索引

●さ行

●た行

●ま行

●や行

●ら行

●わ行

松本幸夫(まつもと・ゆきお)

略歴

1944年　埼玉県熊谷市に生まれる.

1967年　東京大学理学部数学科を卒業.

現　在　学習院大学教授, 東京大学名誉教授.

主な著書

『トポロジー入門』(岩波書店)

『多様体の基礎』(東京大学出版会)

『Morse理論の基礎』(岩波書店)

『トポロジーへの誘い——多様体と次元をめぐって』(遊星社)

[座談会出席者](以下の所属は当時のもの)

加藤十吉(かとう・みつよし)　九州大学

小島定吉(こじま・さだよし)　東京工業大学

福原真二(ふくはら・しんじ)　津田塾大学

4次元(よじげん)のトポロジー[増補新版(ぞうほしんぱん)]

1991年 9月25日　第1版第1刷発行

2009年12月20日　増補新版第1刷発行

著者　松本幸夫

発行者　黒田敏正

発行所　株式会社 日本評論社

〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4

電話 03-3987-8621(販売) 03-3987-8599(編集)

印刷　株式会社 精興社

製本　株式会社 難波製本

ISBN 978-4-535-60615-9